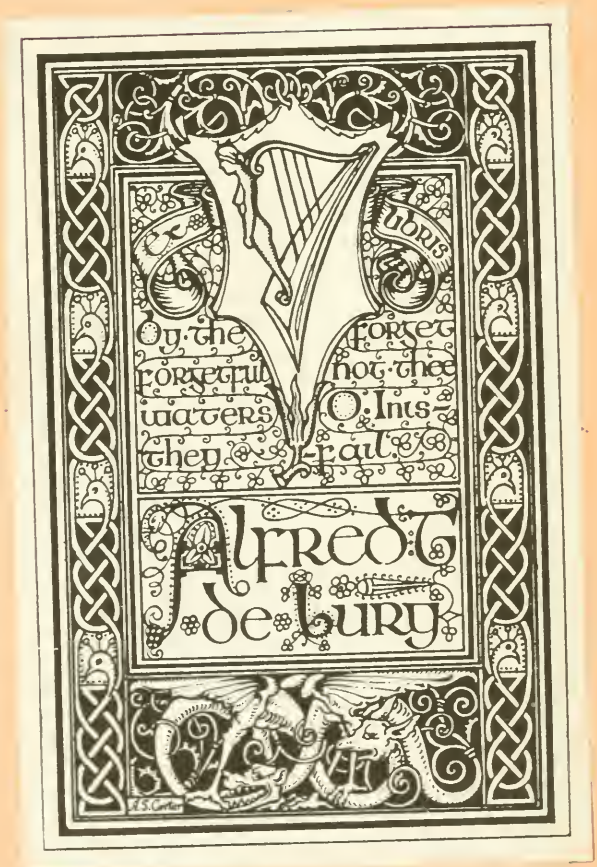
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00887735 9

Fun 18250 D


LIBRIS
Oy the forgetful waters they fail
Forget not thee O Inis
ALFRED DE LURY
J. S. Carter

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/lavieetlestravau00vals

LA VIE ET LES TRAVAUX

DU

BARON CAUCHY.

Dr. Herm. Kortum

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (Tome Ier) a été fait à Paris dans le cours de 1868, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut

LA VIE ET LES TRAVAUX

DU

BARON CAUCHY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES;

PAR

C.-A. VALSON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE;

AVEC UNE PRÉFACE DE M. HERMITE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

TOME I. — PARTIE HISTORIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1868

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

650121
28.1.57

PRÉFACE.

Nous espérons que les amis des sciences mathématiques n'accueilleront point sans intérêt ce long et consciencieux travail, consacré à une révision générale des travaux de Cauchy. La place si considérable qu'occupe l'illustre Géomètre dans la science de notre temps et l'importance des découvertes qui doivent sortir encore des méthodes et des théories qu'il a fondées, feraient sans doute désirer vivement une publication intégrale de ses Œuvres, éparses dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et autres Recueils. Mais en attendant que le nom de Cauchy, l'immortel honneur de la science française, revive dans une telle publication, comme ceux de Laplace et de Lagrange, M. Valson aura rendu un important service, en donnant un guide qui permette ou facilite les recherches dans la multitude de ses écrits. Le dévouement à la mémoire du grand Géomètre pouvait seul inspirer un tel travail; nous ne doutons point qu'il ne soit reçu avec reconnaissance par tous ceux auxquels cette mémoire est restée chère.

HERMITE.

INTRODUCTION.

L'histoire des hommes qui se sont illustrés dans la carrière des Sciences est devenue, depuis plusieurs années, l'objet de recherches nombreuses et d'études approfondies; on s'efforce aujourd'hui de restaurer ces grandes figures que le temps avait à moitié effacées et d'en rétablir la véritable physionomie.

En général, les savants des siècles passés ne sont que très-imparfaitement connus. Sans doute leurs belles découvertes, monuments impérissables d'une puissante intelligence, subsisteront toujours; mais, à part quelques rares détails biographiques, on ignore souvent ce qui les touche de plus près. Ils nous apparaissent ordinairement comme des étrangers au milieu de leurs contemporains dont ils n'étaient pas compris; heureux! quand ils n'ont pas expié dans la misère le glorieux privilége d'avoir eu du génie. Un jour viendra, longtemps après leur mort, où l'on s'apercevra enfin des services qu'ils ont rendus à l'esprit humain; on voudra faire revivre leur mémoire, mais il sera trop tard; l'histoire restera muette, et leur vie sera désormais recouverte d'un voile impénétrable.

Il ne faut pas que nos descendants puissent nous adresser le même reproche. C'est en effet un devoir pour chaque génération de ne pas laisser périr la mémoire de ses grands hommes et de transmettre fidèlement aux généra-

tions suivantes, non-seulement le dépôt intact de leurs travaux, mais encore le souvenir de leurs actions et de leurs exemples.

Ce devoir, je viens le remplir à l'égard de l'un des savants les plus illustres de notre temps, à l'égard de l'un des hommes qui ont le plus honoré la science par l'élévation du génie et par les nobles qualités du caractère et du cœur. Le moment semble du reste favorable pour écrire la vie du Baron Augustin-Louis CAUCHY. Dans quelques années les hommes de son époque auront disparu; il faudrait alors se contenter de souvenirs et de témoignages indirects, qui, sur certains points du moins, seraient insuffisants et peu précis. Aujourd'hui, au contraire, la tâche est facile : le monde savant est rempli de ses disciples; plusieurs de ses amis intimes, plusieurs des membres de sa famille, qui ont vécu avec lui, existent encore; son histoire, écrite sous leurs yeux et avec leur concours, devra présenter toutes les garanties désirables d'exactitude et de fidélité.

Une des principales difficultés du sujet consistait à faire la part, dans un même ouvrage, de ce qui pouvait intéresser à la fois toutes les classes de lecteurs, et de ce qui devait plus spécialement servir de guide aux études didactiques des hommes de science. Notre but, en effet, n'eût été qu'imparfaitement atteint si, à côté du récit vivant et animé qui est nécessaire pour faire connaître et apprécier l'auteur de tant d'œuvres empreintes du génie mathématique, nous n'avions pas présenté au moins un aperçu raisonné de ces œuvres elles-mêmes et

mis aux mains des lecteurs initiés aux secrets de la Géométrie, de la Mécanique, de l'Analyse, une sorte de clef destinée à leur ouvrir la source particulière qu'ils cherchent et qui leur échappait dans cette immensité de travaux. Tel sera l'objet spécial du second volume de cet ouvrage dont le plan, tout méthodique, sera expliqué dans une Introduction placée en tête de ce dernier volume, et qui s'adressera surtout aux savants.

Mais en ce qui touche les lecteurs même étrangers à l'étude de la science algébrique, n'avions-nous pas le devoir de chercher à leur donner, si la chose était possible, une idée simple, et cependant exacte, des découvertes scientifiques d'Augustin Cauchy? Ne serait-ce pas mutiler la vie d'un savant et en altérer, pour ainsi dire, le titre et le caractère, que de la séparer complétement des rudes et difficiles travaux qui ont été le fondement de sa gloire et qui assurent à son nom l'immortalité? Heureusement il y a, dans les Sciences mathématiques les plus hautes, comme dans la philosophie la plus abstraite, de ces grandes lignes qui se dessinent assez nettement pour que tous les yeux puissent les apercevoir, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans le détail des procédés techniques et de recourir à la langue des formules algébriques pour faire comprendre la nature et l'importance des questions résolues et des progrès réalisés. C'est ce que nous essayerons de faire dans quelques Chapitres de notre premier volume, afin de ne pas le laisser muet sur des points si importants.

D'un autre côté, on n'aurait qu'une idée très-incomplète d'Augustin Cauchy, si l'on se bornait à l'énumération de

ses titres scientifiques et à l'inventaire de ses découvertes. Il faut encore entrer dans le détail de ses pensées, de ses actions, et montrer l'homme lui-même, en reproduisant fidèlement les traits principaux de sa vie. Ce sera l'objet essentiel de ce premier volume. Trop souvent on rencontre chez les auteurs, dans une étude de ce genre, la tendance à substituer leurs propres idées à celles de l'homme dont ils s'occupent, et à présenter ainsi au lecteur un personnage de convention qu'ils font parler et agir suivant leurs vues personnelles. L'histoire devient alors une espèce de roman et n'offre plus d'autre intérêt que celui qui peut s'attacher à une œuvre de pure imagination. Afin de ne pas tomber dans ce défaut, nous ne craindrons pas d'exposer les faits avec les éclaircissements nécessaires pour en bien préciser le caractère; dans de nombreuses citations, nous laisserons à Cauchy lui-même le soin d'expliquer les principes de sa conduite et ses pensées intimes; enfin nous n'hésiterons pas, en plus d'une circonstance, à remplacer la forme d'un récit continu, par la forme plus simple qui convient aux Mémoires et qui permet souvent de mieux apprécier les personnes et les choses.

Cette partie de ma tâche a été singulièrement facilitée par les renseignements et les documents de toute espèce que j'ai pu réunir. Outre les souvenirs intimes que j'ai recueillis dans de longs entretiens avec des parents et des amis d'Augustin Cauchy, j'ai consulté et étudié avec soin les papiers nombreux qu'il a laissés et qui ont été mis à ma disposition par la famille avec une libéralité dont je ne saurais me montrer trop reconnaissant. Ces docu-

ments comprennent en particulier sa correspondance depuis sa jeunesse et une foule de Notes manuscrites sur les sujets les plus divers.

Les lettres de Cauchy se rapportent à deux époques principales de sa vie où il se trouva éloigné de sa famille. Une première fois, de 1810 à 1813, il quitta Paris pour aller à Cherbourg remplir les fonctions d'Ingénieur. Sa correspondance nous mettra au courant des travaux et des découvertes qui attirèrent dès lors sur le jeune Géomètre l'attention du monde savant. Elle nous fera assister en même temps aux débuts de cette vie si belle et si pure dont l'honneur ne s'est jamais démenti. Une seconde période d'absence se place entre 1830 et 1838. Après la chute des Bourbons, Cauchy quitta de nouveau Paris, et cette fois, ce fut pour prendre la route de l'exil. Ses lettres nous permettront de le suivre successivement en Suisse, à Turin, et à Prague, où il fut appelé par Charles X pour faire l'éducation du jeune prince qui, banni de sa patrie, a changé son titre de *fils de France* contre celui de comte de Chambord.

En dehors de ces deux périodes, la correspondance du savant était rare et courte ; il traitait ordinairement de vive voix les affaires où il était mêlé, et semblait regretter encore la faible part qu'il prélevait sur son temps pour le commerce épistolaire. Il a laissé au contraire un grand nombre de notes et d'exposés de toute sorte sur les questions qui l'intéressaient. Cauchy a été par excellence l'homme des bonnes œuvres; pour elles il ne marchandait ni son temps ni sa peine. Ses écrits permettront en-

core de le suivre pas à pas dans cette noble carrière de la charité chrétienne à laquelle il a consacré la meilleure partie de son existence.

Ce côté si intéressant de la vie de Cauchy n'est pas suffisamment connu. On savait, à la vérité, que l'illustre Géomètre joignait à un talent de premier ordre une piété tendre et éclairée, mais quelques amis intimes avaient seuls pénétré toute l'étendue du bien qu'il a fait autour de lui; et cependant c'est peut-être à ce point de vue qu'il est surtout utile de raconter sa vie, car si ses travaux scientifiques sont le fondement de sa gloire devant les hommes, c'est surtout par l'excellence de ses vertus et de sa foi qu'il est grand devant Dieu, et s'il est donné à un petit nombre de le suivre dans ses savantes abstractions, chacun peut se proposer d'imiter les beaux exemples qu'il nous a laissés.

Montaigne a dit quelque part que le but principal des études historiques est de « pratiquer les grandes âmes des meilleurs siècles. » Et en effet, le spectacle d'une âme vraiment grande est fécond en précieux enseignements. On aime surtout à s'arrêter sur celles qui, à l'éclat de la vertu, joignent celui de l'intelligence et du génie. On comprendrait même difficilement une vertu supérieure qui en serait complétement dépourvue. Il nous répugne d'imaginer un grand cœur associé à un petit esprit; un tel contraste offenserait notre vue, et nous aimons à la reporter sur un modèle plus conforme à l'idéal que nous avons conçu.

Il ne faudrait pas croire, du reste, que la réalisation de

cet idéal soit aussi rare qu'on se plaît quelquefois à le supposer. La plupart des savants illustres ont été en même temps des philosophes éminents et des hommes profondément religieux. Il suffira de citer comme exemples quelques-uns de ces génies supérieurs qui seront l'éternel honneur de l'esprit humain.

Après un travail assidu et opiniâtre de vingt-deux années, Képler achève enfin la découverte de ses lois immortelles. Le voilà donc en possession de ces vérités auxquelles il a consacré sa vie ; aussitôt son cœur et son âme se dilatent et s'élèvent vers l'auteur même de ces merveilles, et son enthousiasme éclate avec transport : « Grâces vous soient rendues, ô Maître des créatures, du bonheur que vous m'avez procuré. J'ai enfin terminé mon œuvre. J'y ai mis toutes les forces de mon âme. Autant qu'il a dépendu de ma faiblesse, j'ai tâché de manifester votre gloire aux yeux des hommes. Je me suis toujours efforcé de raisonner avec sagesse ; mais si quelque chose d'indigne de Vous m'est échappé, à moi qui ne suis qu'un ver de terre, né et nourri dans la fange du péché; si la beauté admirable de vos œuvres m'a enorgueilli ; si j'ai cherché la gloire qui vient des hommes; éclairez-moi, ô mon Dieu! afin que je me corrige. Pendant que j'élabore une œuvre destinée à Vous glorifier, pardonnez-moi, Seigneur doux et miséricordieux, et accordez-moi que mon travail soit profitable pour votre gloire et pour le salut des âmes (1). »

---

(1) Citation tirée du Livre de l'*Harmonique*.

Un tel langage, qui était habituel dans la bouche de ce grand génie, est bien fait pour émouvoir profondément, et, en présence de sentiments aussi élevés, on ne sait lequel admirer davantage, ou du savant qui, par la puissance de son intelligence, a su pénétrer les mystères de la nature, ou du chrétien dont la foi ardente s'élève hardiment, à travers les créatures, jusqu'à Dieu lui-même, pour lui rendre un solennel hommage.

Nous pourrions encore citer les noms de Descartes, de Leibnitz, de Fermat et surtout celui de Pascal, avec qui Cauchy présente, comme on le verra, plus d'un point de ressemblance. Nous nous contenterons de rappeler que l'illustre Newton était le plus religieux des hommes. Il possédait un sentiment si vif et si intime de la majesté de Dieu qu'il avait coutume de se découvrir avec respect quand il entendait prononcer son nom adorable. Il ne supportait pas qu'on parlât devant lui avec irrévérence des choses religieuses, et, l'astronome Halley s'étant permis un jour, en sa présence, quelques paroles impies, Newton le releva vivement en lui disant qu'il avait lui-même médité sur toutes ces questions et qu'il savait à quoi s'en tenir.

A ces noms glorieux on pourrait, il est vrai, opposer les noms de quelques savants du siècle dernier ; mais chez les incrédules du XVIIIe siècle, l'impiété était un effet de leur éducation, du milieu dans lequel ils vivaient et de la corruption de leur époque, plutôt que le résultat d'une conviction réfléchie et raisonnée. Combien ont fini par abjurer plus ou moins leurs erreurs ! Combien ont réalisé

à leur dernière heure cette parole du poëte latin :

« . . . . . oculis errantibus, alto
Quæsivit cœlo lucem, ingemuitque repertâ! » (1)

Le nom de Laplace est le plus éclatant de ceux que l'incrédulité revendique, et cependant il convient de ne pas même le lui abandonner sans réserve. Le reproche le plus grave qui pèse sur la mémoire de Laplace, c'est d'avoir exprimé, à l'occasion de son célèbre *Traité sur la Mécanique céleste*, l'opinion que « Dieu était une hypothèse dont il n'avait pas eu besoin. » Cette assertion, prise à la lettre, ne serait rien moins qu'impie, mais ne peut-on pas en donner une explication qui en atténuerait beaucoup le sens et la portée ?

Le grand honneur de Laplace est d'avoir complété l'œuvre de Newton en levant les difficultés que présentait l'exposition du Système du monde dans la théorie de l'Attraction universelle. Newton, malgré son immense génie, n'avait pas pu rendre compte de tous les faits, et, lorsque ses principes lui paraissaient en défaut, il avait l'habitude de recourir à la toute-puissance divine et de faire intervenir Dieu pour expliquer ce qui échappait à sa propre intelligence. Cette manière de procéder, qui témoignait du reste en faveur de ses sentiments religieux, n'était nullement philosophique. Elle revenait en définitive à supposer la création incomplète et à réduire le créateur au rang d'un ouvrier malhabile et imprévoyant

(1) *Énéide*, liv. IV, v. 691.

qui n'aurait pas su introduire dans son œuvre tous les éléments nécessaires de conservation et de durée. Elle était en outre essentiellement imprudente, car si plus tard, par suite du progrès des sciences, les géomètres venaient à expliquer ces contradictions apparentes par des raisons purement naturelles, les preuves que Newton prétendait en tirer en faveur de la divinité tombaient d'elles-mêmes et offraient aux incrédules un trop facile triomphe. C'est ce qui ne manqua pas d'arriver, et le mot attribué à Laplace ne serait, suivant nous, qu'une protestation contre le système peu rationnel qui prétendait rattacher à une intervention supérieure des faits dont les principes naturels suffisent pour donner l'explication.

L'astronome Lalande est peut-être, parmi les savants de mérite, celui dont la triste réputation d'incrédulité et d'athéisme est le mieux établie ; chacun se rappelle la mesure sévère dont il fut l'objet de la part de l'empereur Napoléon à qui les esprits de cette sorte causaient une invincible antipathie. Et cependant, dans ses derniers moments (1),

---

(1) Le récit de la mort de Lalande étant peu connu, il ne sera pas inutile de reproduire les détails qu'on trouve à ce sujet dans la *Vie de M. l'abbé Émery*, par M. Gosselin, et qui sont basés sur les témoignages les plus authentiques.

Lalande était parent du célèbre Sulpicien et avait toujours conservé avec lui des relations d'amitié. M. Émery n'avait pas désespéré de le voir revenir à de meilleurs sentiments. Profitant un jour d'une occasion favorable, il lui avait fait cette ouverture : « Mon cher cousin, nous sommes tous mortels, et je ne pense pas que vous voulussiez sortir de ce monde sans remplir des devoirs dont vous ne pouvez ignorer l'importance. — C'est bien mon intention, répondit Lalande ; mais si je vous faisais appeler, consentiriez-vous à me procurer les secours de votre ministère? — Vous

l'auteur du *Dictionnaire des athées* prouva bien qu'il était inspiré, moins par une conviction sincère que par une vanité désordonnée et par la manie de faire parler de lui.

Mais laissons de côté ces tristes et rares exceptions, elles ne font que mieux ressortir toute la grandeur et la beauté du génie chrétien.

Un dernier caractère bien remarquable de la véritable science, c'est la simplicité et la modestie qui résultent d'un vif sentiment de la faiblesse et de la petitesse de

---

pouvez y compter, reprit M. Émery; comme prêtre, je dois être disposé à me rendre auprès de tout homme qui réclame les secours de la religion; à plus forte raison, s'il s'agissait d'un homme qui serait, comme vous, mon compatriote, mon ami et mon parent. Mais, ajouta-t-il, si je venais à apprendre que vous êtes malade et que vous ne pensassiez pas à me faire demander, me permettriez-vous d'aller vous rappeler les sentiments que vous me témoignez aujourd'hui? — Oh! si le cas arrivait, répondit Lalande, vous me feriez plaisir d'en user de la sorte. »

Ce cas ne tarda pas, en effet, à arriver. M. Émery, ayant appris que Lalande était en danger de mort, s'empressa de se rendre chez lui pour lui rappeler sa promesse; mais les amis du malade faisaient bonne garde autour de lui dans la crainte qu'il ne rétractât ses erreurs. Ils protestèrent donc que l'état de M. Lalande n'avait rien d'alarmant, qu'il était en ce moment très-accablé et que le médecin avait recommandé qu'il ne parlât à personne. M. Émery insista inutilement en se faisant connaître comme parent et ami de Lalande. Il ne put le voir ce jour-là et consentit, quoique avec beaucoup de regret, à différer sa visite au lendemain, comme on l'en priait. Mais le lendemain il apprit que Lalande était mort pendant la nuit. Profondément affligé de cette nouvelle, il se rendit au Collége de France pour témoigner sa peine à la nièce du défunt. Le regret qu'il ressentit de ce fâcheux accident fut encore augmenté, quelques jours après, par les détails qu'il apprit de la bouche de la servante qui avait soigné Lalande pendant sa dernière maladie. Cette femme, qu'il rencontra par hasard, lui dit avec une vive émotion : « Oh! monsieur, combien mon cher maître vous a demandé pendant la nuit de sa mort! Il a prié et conjuré ces messieurs qui étaient là de permettre qu'on vous envoyât chercher, et il s'est mis en colère contre eux parce qu'ils lui refusaient cette consolation. Oh! que de fois ce pauvre défunt vous a réclamé! »

l'homme, en présence des merveilles de la création et des horizons immenses ouverts à son intelligence. Que sommes-nous en effet devant Dieu? et que sont à ses yeux les plus magnifiques découvertes? Newton va nous le dire avec toute l'autorité de son nom et l'expérience de plus de soixante ans d'incessantes recherches. On le félicitait un jour au sujet de ses admirables ouvrages; il se contenta de répondre : « Je ne sais ce que le monde pensera de mes travaux; mais pour moi, il me semble que je n'ai été autre chose qu'un enfant, jouant sur le bord de la mer et trouvant, tantôt un caillou un peu plus poli, tantôt une coquille un peu plus agréablement variée, tandis que le grand océan de la vérité s'étendait inexploré devant moi. » Ainsi, celui que l'on regarde avec raison comme le plus grand des génies scientifiques, se compare à un enfant; ses magnifiques découvertes, objets de l'admiration du monde entier, ne sont pour lui que des grains de sable, comparées à l'immensité des choses qu'il ignore. Quelle leçon pour notre orgueil! et quelles devront être nos pensées, à nous, qui marchant de loin sur ses traces, nous estimons heureux quand, à force d'étude, nous avons pu le suivre dans ses hautes conceptions?

Pourquoi faut-il que ces vérités capitales soient si fréquemment oubliées et que tant d'âmes bien douées, que tant d'esprits distingués méconnaissent, à leur détriment, le secret de la véritable grandeur? On se prend souvent à déplorer une erreur si funeste et à verser des larmes amères, en voyant des hommes appelés, par leurs talents, à être les modèles de leurs semblables, s'évanouir dans

leurs propres pensées et rendre stériles leurs qualités éminentes, pour les avoir séparées de la source féconde qui pouvait seule les vivifier.

Voulons-nous savoir à quoi mènent les hautes sciences et le fruit qu'on doit en tirer ? Écoutons encore, sur ce sujet, les sages conseils que Bossuet adressait aux savants de son temps (1) : « Philosophes de nos jours, de quelque rang que vous soyez, ou observateurs des astres, ou contemplateurs de la nature inférieure, et attachés à ce qu'on appelle *physique*, ou occupés des sciences abstraites qu'on appelle *mathématiques*, où la vérité semble présider plus que dans les autres ; je ne veux pas dire que vous n'ayez de dignes objets de vos pensées, car, de vérité en vérité, vous pouvez aller jusqu'à Dieu, qui est la vérité des vérités, la source de la vérité, la vérité même, où subsistent les vérités que vous appelez éternelles, les vérités immuables et invariables, qui ne peuvent pas ne pas être vérités, et que tous ceux qui ouvrent les yeux voient en eux-mêmes, et néanmoins au-dessus d'eux-mêmes, puisqu'elles règlent leurs raisonnements comme ceux des autres, et président aux connaissances de tout ce qui voit et qui entend, soit hommes, soit anges. C'est cette vérité que vous devez chercher dans vos sciences. Cultivez donc ces sciences, mais ne vous y laissez point absorber. Ne présumez pas, et ne croyez pas être en quelque chose plus que les autres, parce que vous savez les propriétés et les raisons des grandeurs et des petitesses ;

(1) *Élévations sur les mystères*, XVIIe semaine, 3e élévation.

vaine pâture des esprits curieux et faibles qui, après tout, ne mène à rien qui existe, et qui n'a rien de solide qu'autant que, par l'amour de la vérité et l'habitude de la connaître dans des objets certains, elle fait chercher la véritable et utile certitude en Dieu seul. »

Tels sont les grands principes qu'il ne faut pas se lasser de proclamer, et jamais peut-être il n'a été plus opportun d'en rappeler le souvenir. Rendre à la Science sa dignité et son véritable caractère, en remontant à sa céleste origine, est un des intérêts les plus pressants de notre époque.

Je viens, après tant d'autres, apporter à cette cause un effort modeste mais dévoué. Je laisserai à de plus habiles le soin de revendiquer les droits de la raison méconnue ou de la foi outragée; je me contenterai de donner, par l'exemple d'un savant de génie, une réfutation pratique de l'erreur. Les grands hommes des siècles précédents avaient déjà laissé, à cet égard, de magnifiques enseignements; Augustin Cauchy est venu nous apprendre que leurs nobles traditions ne sont point perdues. Hâtons-nous d'ailleurs d'ajouter que si, parmi les hommes célèbres de notre temps, il brille au premier rang par la puissance de son génie et par la pureté de sa foi, il ne serait pas difficile de montrer à sa suite de nombreux et d'illustres imitateurs.

C.-A. VALSON.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

Pages.

PRÉFACE V

INTRODUCTION VII

CHAPITRE I. — LA FAMILLE.

Naissance d'Augustin-Louis Cauchy. — Sa famille. — Influence de la famille sur la vie de Cauchy. — Éducation paternelle. — Notice sur M. Louis-François Cauchy. — Élévation et noblesse de son caractère. — Son mérite littéraire. — Son talent pour la poésie latine. — Ses recherches sur les langues orientales..... 1

CHAPITRE II. — L'ÉDUCATION.

M. Cauchy se retire à Arcueil avec sa famille. — Il entreprend l'éducation de ses fils. — Détails sur cette éducation. — Son caractère chrétien. — Jugement porté par Lagrange sur Cauchy encore enfant. — Grand prix du concours général. — Première communion de Cauchy. — Il commence l'étude des Mathématiques. — Il entre à l'École Polytechnique. — Ses succès dans cette École et à celle des Ponts et Chaussées..... 12

CHAPITRE III. — SÉJOUR A CHERBOURG.

Cauchy est envoyé à Cherbourg comme ingénieur. — Ses travaux pour l'établissement des ports. — Il reprend l'étude des Mathématiques et compose des Mémoires. — Il s'occupe d'enseignement, de Botanique et d'essais littéraires. — Sagesse de sa conduite. — Correspondance avec sa famille. — Il revient à Paris..... 25

CHAPITRE IV. — PREMIERS TRAVAUX.

Cauchy compose divers Mémoires : sur la théorie des polyèdres; — sur les fonctions symétriques; — sur les intégrales définies :

Pages.

— sur les théorèmes de Fermat. — Il remporte en 1816 le grand prix de Mathématiques. — Il entre à l'Académie des Sciences. — Circonstances dans lesquelles eut lieu sa nomination..... 43

CHAPITRE V. — Le professorat et les événements de 1830.

Cauchy est appelé au professorat. — Son mérite et ses succès dans l'enseignement. — Ouvrages classiques. — Mariage de Cauchy. — Événements de 1830. — Convictions politiques de Cauchy. — Il refuse le serment. — Il quitte la France. — Son séjour en Suisse. — Il est appelé à Turin. — On lui propose de faire l'éducation du duc de Bordeaux. — Il se rend à Prague..... 60

CHAPITRE VI. — Éducation du prince.

Principes de Cauchy relativement à cette éducation — « Appel aux hommes de bons sens et de bonne foi. » — Détails sur son séjour auprès de la cour exilée. — Il continue ses travaux scientifiques. — Mémoires sur la théorie de la lumière. — Voyages en Allemagne. — Cauchy reçoit le titre de baron. — Il revient en France. 80

CHAPITRE VII. — Retour en France.

Cauchy rentre à l'Académie. — Il est proposé pour une chaire. — Il refuse le serment. — Il est nommé au Bureau des Longitudes. — Débats soulevés par cette nomination. — Événements de 1848. — Cauchy rentre dans l'enseignement. — Événements de 1852. — Cauchy est dispensé du serment par l'Empereur..... 95

CHAPITRE VIII. — Affaire des Jésuites.

État de l'opinion en ce qui concerne les Jésuites. — Question de l'enseignement. — Cauchy prend la défense des Jésuites et écrit en leur faveur. — « Considérations sur les ordres religieux. » — « Appel aux deux Chambres. » — Analyse de ces deux Mémoires. 108

CHAPITRE IX. — Travaux scientifiques, première partie.

Recherches sur les séries. — Des séries chez les anciens et chez les modernes. — Questions qui se rattachent à cette théorie. — Cauchy établit les conditions de leur emploi. — Laplace et la Mécanique céleste. — Théorie des imaginaires. — Leur application à l'étude des équations algébriques ; — à l'étude des fonctions de tous

Pages.

les ordres. — Calcul des résidus. — Relations entre la science pure et la science appliquée. — Travaux astronomiques. — M. Le Verrier et la planète Pallas. — Analyse et Géométrie. — Rapprochement entre Gauss et Cauchy..... 122

CHAPITRE X. — Travaux scientifiques, deuxième partie.

Objet de la Mécanique moléculaire. — Constitution intime des corps. — L'éther. — Travaux de Cauchy sur la lumière. — Mémoires sur le phénomène de la dispersion. — Physique mathématique. — Réduction des diverses théories à l'unité. — Élasticité des corps solides. — Titres académiques..... 141

CHAPITRE XI. — Cauchy littérateur.

Influence des sciences sur la littérature. — Mérite de Cauchy comme écrivain. — Ses écrits de polémique. — Ses ouvrages scientifiques. — Son goût pour la poésie latine et française. — L'épître sur l'Astronomie. — Cauchy étudie l'hébreu. — Occasion de cette étude. — Mémoire sur la prosodie hébraïque. — Son aptitude pour l'étude des langues modernes..... 155

CHAPITRE XII. — Sentiments chrétiens de Cauchy.

Origine et nature de ces sentiments. — Profession de foi chrétienne. — Accord de la science et de la foi. — Appel à la jeunesse studieuse. — Droits de la vérité. — De la tolérance et de la liberté. — Jugement de Cauchy sur le XVIIIe siècle..... 169

CHAPITRE XIII. — Œuvres chrétiennes.

Œuvre de Saint François-Régis. — La science mise au service de la charité. — Appel en faveur des Irlandais. — Réforme du régime des criminels. — Œuvre des petits Savoyards. — La société de Saint Vincent de Paul. — Esprit de prosélytisme..... 188

CHAPITRE XIV. — L'Institut catholique.

Dévouement de Cauchy pour la jeunesse. — Son affection pour ses élèves. — Nécessité d'une œuvre pour les jeunes gens. — Les écoles en 1842. — Organisation de l'Institut catholique. — Création de conférences. — Part qu'y prend Cauchy. — Rapport de la foi avec les sciences et les lettres. — Sentiments de Cauchy sur cette question. — Poésie sur une Église catholique..... 201

Pages.

CHAPITRE XV. — L'OEuvre pour l'observation du dimanche.

Nécessité de l'OEuvre. — Son but moral et pratique. — La liberté du dimanche. — Organisation de l'OEuvre. — Association des commerçants de Paris. — Difficultés d'exécution..... 214

CHAPITRE XVI. — L'OEuvre des Écoles d'Orient.

Origine et but de l'OEuvre. — La guerre de Crimée. — Part de Cauchy dans la fondation de l'OEuvre des Écoles; témoignages divers. — Difficultés de la question d'Orient. — Infériorité du clergé grec. — Documents divers. — M. Eugène Boré. — L'OEuvre des Écoles d'Orient et l'Institut. — Difficultés d'exécution. — Résultats obtenus..... 223

CHAPITRE XVII. — Physionomie de Cauchy.

Traits principaux de la physionomie de Cauchy. — Ses qualités naturelles. — Ses amitiés. — Ses relations avec le monde. — Caractère de son génie scientifique. — Reproches adressés à Cauchy. — Discussion à ce sujet 243

CHAPITRE XVIII. — La mort et les funérailles.

Dernière maladie de Cauchy. — Ses sentiments de piété. — Il s'occupe encore de bonnes œuvres. — Récit de ses derniers moments. Funérailles. — Discours funèbres. — Lettres et témoignages divers. 259

CHAPITRE XIX. — Parallèle de Cauchy et de Pascal.

Traits communs de caractère. — Comparaison des travaux scientifiques. — La jeunesse, âge des grandes découvertes. — Pascal littérateur et philosophe. — Le livre des Pensées. — Lettres provinciales. — Influence du Jansénisme sur Pascal. — Cauchy défenseur des Jésuites. — La foi chez Pascal et chez Cauchy. — Austérité de Pascal. — Sa sévérité pour les autres. — Conclusion. 280

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

LA VIE

DU

BARON AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

CHAPITRE PREMIER.

SA FAMILLE.

Fortes creantur fortibus et bonis.
HORACE, *Carm.*, IV, 3.

Naissance d'Augustin-Louis Cauchy. — Sa famille. — Influence de la famille sur la vie de Cauchy. — Éducation paternelle. — Notice sur M. Louis-François Cauchy. — Élévation et noblesse de son caractère. — Son mérite littéraire. — Son talent pour la poésie latine. — Ses recherches sur les langues orientales.

Augustin-Louis Cauchy naquit à Paris, le 21 août 1789, sur la paroisse Saint-Roch, où il fut baptisé le lendemain.

Nous allons d'abord faire connaître la famille au milieu de laquelle la Providence l'avait placé; l'influence décisive qu'elle exerça sur toute sa carrière en rattache, par des liens intimes, l'histoire à notre sujet.

A l'époque même de la naissance de son fils Augustin, M. Louis-François Cauchy venait de voir se briser tout à coup, par les conséquences de la première crise révolutionnaire, sa carrière administrative commencée d'une

manière brillante et précoce. Né à Rouen en 1760, M. Cauchy, après de fortes études classiques, avait débuté comme avocat au parlement de Normandie. Il n'avait encore que vingt-trois ans lorsque M. Thiroux de Crosnes, intendant de la haute Normandie, ayant remarqué le talent du jeune avocat dans une cause où il se trouvait intéressé, lui fit offrir de l'attacher comme secrétaire général à son intendance. M. Cauchy accepta et, deux ans après, il suivit à Paris la personne et la fortune de M. de Crosnes, appelé en 1785 à la charge difficile et importante de lieutenant de police, qui comprenait alors une partie considérable des attributions de l'édilité parisienne. L'administration de M. de Crosnes fut marquée par de grandes mesures qui, en assainissant l'ancien Paris, préparèrent la voie aux embellissements modernes de la capitale ; on lui doit notamment d'avoir, par une entreprise hardie, fait disparaître du sol actuel des Halles l'ancien cimetière des Innocents. M. Cauchy fut associé à ces mesures et continua ses fonctions de secrétaire général près de M. de Crosnes, jusqu'au jour où, par la prise de la Bastille (14 juillet 1789), la Révolution française commença de rompre violemment tous les anciens ressorts de l'administration et de l'État. Dès le lendemain, les attributions du lieutenant de police furent absorbées dans celles du nouveau maire de Paris. C'eût été peut-être, pour un esprit plus ambitieux que M. Cauchy, le moment de prendre sa place dans le mouvement qui entraînait alors vers les affaires publiques tant de jeunes et ardentes capacités. Ses amitiés et ses talents pouvaient lui faciliter l'accès de nos grandes assemblées électives, mais il ne se laissa pas séduire par cette pensée. Vivement blessé dans ses affections par la chute de son noble protecteur qui était devenu son ami, et mesurant toutes les conséquences d'une responsabilité politique

dans des années de révolution, il se réfugia pour quelque temps, comme dans une retraite, dans les modestes fonctions de chef des bureaux des hospices et ateliers de bienfaisance. On le retrouve, à la renaissance de l'ordre social, attaché à la Commission de l'agriculture et des arts, puis à la tête des mêmes bureaux, lors de la première formation du Ministère de l'Intérieur. Ce fut là qu'à l'époque du Consulat, plusieurs de ses anciens amis, qui avaient couru la carrière périlleuse des honneurs et qui avaient été compris dans la première liste du Sénat, vinrent le chercher pour lui offrir la place de secrétaire général de ce grand corps; les règlements laissaient alors cette fonction au choix de l'assemblée. M. Cauchy y fut nommé par scrutin, le 1er janvier 1800. Il se trouva, pour son service, sous les ordres immédiats de M. de Laplace, promu dans ce même temps au titre de comte et à la dignité de chancelier du Sénat conservateur. A partir de 1814, M. Cauchy père a continué près de la Pairie, avec le titre de garde des registres et archives, des fonctions analogues à celles qu'il remplissait près du Sénat; la rédaction des procès-verbaux, confiée à ses soins, prit alors, par l'éclat des discussions politiques, un intérêt tout nouveau. M. Cauchy joignait à ce titre celui de garde des archives des ordres de Saint-Michel et du Saint-Esprit. Entouré de considération et d'estime, il a poursuivi jusqu'en 1848 sa carrière si bien remplie de travaux distingués et de bonnes œuvres.

En 1787, il avait contracté mariage avec une personne aussi remarquable par ses qualités charmantes que par ses vertus, Mlle Marie-Madeleine Desestre. De cette union, dont la constance et le bonheur se sont prolongés plus d'un demi-siècle, sont issus quatre fils et deux filles. L'une de ces dernières, Thérèse, est morte en bas âge;

l'autre fille, Adèle, mariée à son cousin, M. G. de Neubourg, conseiller référendaire à la Cour des comptes, a vécu jusqu'en 1863.

Le plus jeune des fils, Amédée, a été enlevé à vingt-cinq ans (le 1er octobre 1831), au moment où il achevait ses cours de droit. Les trois autres, Augustin, Alexandre, Eugène, se sont retrouvés, avec leurs familles, au pied du lit de mort de leur vénérable père pour recevoir sa dernière bénédiction et ses adieux.

Alexandre, né en 1792, fut, comme nous le dirons bientôt, le compagnon d'études et l'émule de son frère aîné. Il montra lui-même, de bonne heure, des dispositions naturelles pour les sciences mathématiques; mais, pendant que son frère Augustin s'y livrait tout entier, Alexandre se distingua dans l'étude du droit, et, à vingt-cinq ans, les portes de la magistrature s'ouvrirent pour lui dans les conditions les plus favorables. Les Cours royales avaient alors le droit de présentation pour la nomination de leurs conseillers-auditeurs. C'était un noviciat ambitionné par tout ce qu'il y avait de jeunes gens de mérite, aspirant à cette noble carrière. Les de Ravignan, les de Broé, et tant d'autres, y ont développé d'abord leurs beaux talents. Alexandre Cauchy, nommé conseiller-auditeur à la Cour royale de Paris, s'y fit bientôt remarquer par la netteté de son esprit, la rectitude de son jugement, la gravité de sa jeunesse. Devenu conseiller à la même Cour en 1824, il y développa, dans la présidence des assises, d'éminentes qualités qui le conduisirent à être nommé président de chambre à la Cour royale en 1847, et conseiller à la Cour de cassation deux ans après. C'est dans cette position élevée que la mort est venue le frapper, le 30 mars 1857. Peu de magistrats ont laissé des regrets plus vifs et plus mêlés d'affection et d'estime.

Eugène Cauchy, né en 1802, fut aussi admis de bonne heure, en qualité de garde des registres adjoint de la Pairie, à partager les fonctions de son père, auquel il succéda dans sa charge en 1831. Il participait en même temps aux travaux du Conseil d'État, d'abord comme auditeur, puis comme maître des requêtes. Il a continué ces doubles fonctions jusqu'à la suppression de la Pairie en février 1848. A partir de cette époque, sa vie a été consacrée tout entière à l'étude du droit public, dans lequel il s'était déjà fait connaître par divers ouvrages, notamment par son livre des *Précédents de la Cour des Pairs*, publié en 1839, et destiné à devenir comme le manuel de cette haute juridiction. Il avait aussi publié, en 1847, l'*Histoire du duel* considéré au point de vue de la législation et des mœurs, et ce livre avait été couronné par l'Académie française; mais une question plus vaste et d'un intérêt plus actuel devait lui fournir bientôt le sujet de son principal ouvrage. En 1854, l'Académie des Sciences morales et politiques avait mis au concours l'*Histoire du droit international maritime, dans ses rapports avec les progrès de la civilisation chez les différents peuples*. L'ouvrage composé sur ce programme par M. Eugène Cauchy a obtenu, en 1862, le prix proposé, et a valu à son auteur d'être élu, bientôt après, Membre de cette même Académie, dans la section de Législation, Droit public et Jurisprudence.

Augustin Cauchy était l'aîné de cette famille, dont il devait être en même temps le modèle et l'honneur. Les sciences furent son partage. C'est en effet à sonder les plus difficiles problèmes des Mathématiques et de la Physique que se sont exercées principalement les puissantes facultés de son intelligence et qu'il a conquis une gloire impérissable. Il était naturellement doué, sous ce rap-

port, d'une aptitude et d'un génie qui n'ont été accordés qu'à un petit nombre d'hommes dans la suite des siècles. De plus, le ciel lui avait départi avec libéralité les dons de l'âme et du cœur. Simple et modeste, il avait voué à la science un culte pur et désintéressé; invariablement attaché à l'idée du devoir, il défendit avec constance les grands principes de la justice et de l'honneur. Sa vie n'offre pas de ces regrettables faiblesses qui déparent souvent celle des hommes les plus illustres; chez lui, le caractère fut toujours à la hauteur de la science, et le cœur au niveau du génie. Que dire enfin de son ardeur pour le bien, de son zèle infatigable pour les bonnes œuvres, de sa vive et tendre piété? Jamais peut-être la science n'avait apparu avec un éclat si pur, avec une grâce si aimable, avec un caractère aussi profondément chrétien.

Tel est l'homme éminent dont je me propose de raconter la vie et les travaux.

Ses commencements sont peu connus, ils méritent cependant qu'on s'y arrête avec intérêt. Le plus souvent les grands hommes ne se forment pas tout seuls; quelle que soit l'élévation de leur intelligence, la puissance native de leur génie, ils ont besoin, à l'origine, de direction, d'appui, de conseil; pour tout dire en un mot, il leur faut un maître. Sans ce maître, les dispositions les plus heureuses sont exposées à demeurer stériles, ou à ne produire que des fruits incomplets et sans valeur. L'histoire rappelle avec honneur les noms des hommes qui se sont ainsi appliqués à former d'illustres élèves et à développer chez eux les rares facultés dont le ciel les avait doués; une partie de la gloire des disciples se reflète, à juste titre, sur la mémoire de leurs précepteurs.

C'est ainsi, par exemple, que Képler a illustré son maître Mœstlinus. Rien de plus obscur que ses premières

années. Qui aurait pu, en effet, pressentir dans un jeune homme inconnu et délaissé, d'abord valet d'auberge, puis laboureur, le législateur futur de l'Astronomie? Mais à Tubingue, Képler rencontre le professeur Mœstlinus qui devine son génie et l'accepte pour son disciple, ou plutôt l'adopte comme un fils. Plus tard il l'aidera dans ses premiers essais, il se chargera de publier et de faire imprimer ses livres. Si Képler rencontre des obstacles, s'il éprouve des rebuts, c'est Mœstlinus qui le soutient et le console. Aussi rien n'égale la reconnaissance de l'astronome pour son maître, et le nom chéri de Mœstlinus reparaît sans cesse sous sa plume lorsque, dans un style plein d'enthousiasme, il raconte ses grandes découvertes.

L'exemple de Pascal a encore ici une application plus directe, car il fut élevé dans la maison paternelle et n'eut jamais d'autre maître que son père. Resté veuf de bonne heure, ce dernier avait pris le parti de renoncer aux fonctions publiques pour se consacrer à l'éducation de son fils unique qui, dès l'enfance, annonçait des dispositions extraordinaires. Il lui enseigna d'abord les éléments de la grammaire et des langues et, quoiqu'il fût lui-même très-instruit, il ne dédaignait pas de descendre aux moindres détails pour se mettre mieux à la portée du jeune écolier. Afin de développer son intelligence avec plus de méthode et de profit, il lui avait interdit toute étude scientifique avant que ses études littéraires fussent complétement terminées. Mais, dès l'âge de douze ans, le génie mathématique de Pascal prenait l'essor d'une manière inattendue, et l'élève, s'initiant tout seul au travail qu'on jugeait prématuré pour son âge, inventait pour son propre compte la Géométrie avec *des barres et des ronds*. Le père, stupéfait en présence d'un tel résultat, ne résista pas davantage et se contenta, dès lors,

de guider dans la carrière des sciences les premiers pas de son fils. On peut lire dans la *Vie de Pascal*, par Mme Périer, sa sœur, les touchants détails de cette éducation paternelle qui devait donner à la France un géomètre éminent, un philosophe profond et un illustre écrivain.

Le père de Cauchy fut aussi le premier et, pendant longtemps, le seul professeur de son fils. C'est en effet au sein de la famille, près du foyer domestique, que le jeune Augustin passa le temps de sa première éducation; c'est là qu'il étudia les éléments des langues et des sciences; c'est là surtout qu'il reçut ces précieuses leçons de vertu et de piété qui devaient produire plus tard des fruits si abondants. On peut dire de lui, comme de Pascal, qu'il fut vraiment l'ouvrage de son père. En comparant les éducations des deux savants, on y trouvera une foule de points de ressemblance; aussi, pour bien comprendre l'influence que les soins paternels exercèrent sur la vie d'Augustin Cauchy, il est, ce nous semble, nécessaire de faire connaissance plus complète avec le père, avec le maître.

M. Cauchy avait reçu lui-même une éducation remarquable. Élève de l'ancienne Université de Paris, il s'était distingué par de brillantes études et avait remporté, à l'âge de dix-sept ans, le prix d'honneur du concours général. C'est assez dire combien étaient développés chez lui les dons de l'esprit et le goût des lettres qui firent toujours une des principales occupations de sa vie. Il excellait surtout dans la poésie latine; on conserve de lui plusieurs odes dans lesquelles il se montre le rival heureux de Santeuil pour l'élégance du vers et la noblesse de la pensée. Les sujets qu'il traitait avaient ordinairement rapport aux grands événements au milieu desquels il vivait. Tan-

tôt il retrace, avec un cœur triste et ému, les malheurs de son temps, tantôt il célèbre avec enthousiasme les hauts faits du Consulat et de l'Empire. On cite en particulier l'élégie sur la violation des tombes royales de Saint-Denis, l'ode sur le rétablissement du culte catholique, le dithyrambe sur la bataille d'Austerlitz, et encore un chant où il se plaint de l'abandon dans lequel on laisse, de nos jours, les Muses latines. Il ne sera pas sans intérêt de rapporter au moins un passage de ces belles poésies. Les dernières strophes de l'ode sur le rétablissement du culte ne feront pas seulement connaître le talent du poëte; elles serviront en même temps à caractériser les nobles qualités de l'homme et du chrétien :

Ergo receptis fulget honoribus
Divina sedes; exilio excitus,
  Prodit sacerdos, ara noto,
    Sicca diu, imbuitur vapore.
Cœleste ab altis undique personat
Verbum cathedris, indocilis regi
  Discit juventus et parentes,
    Et patriam, et coluisse leges.
Quin et malignâ suppositas manu
Aris in ipsis dissidii faces
  Pax alma restinxit, fidesque
    Una manet, domus una, Christi.
Æterna, salve, Relligio; tuos
Sol vidit ortus, quâ nituit die;
  Sol nullus occasum videbit,
    Æthereo nisi qui cadentes
Stellas videbit fornice, qui polum
Nutare fessis sentiet axibus,
  Ruptoque nexu cuncta priscum
    In chaos aspiciet revolvi.

Les poésies latines de M. Cauchy lui valurent les suffrages des juges les plus compétents. « Les chants harmonieux de votre muse latine, lui écrivait l'académicien

Aignan, font un peu honte au silence de nos muses françaises. Vous nous rendez les Santeuil, les Commines, les Coffin; qui nous rendra les Rousseau? » On conserve une lettre de Bernardin de Saint-Pierre où le célèbre littérateur, après avoir remercié M. Cauchy de services rendus à un de ses parents malheureux, le félicitait sur le mérite de ses productions. « Je ne me rappelle pas, lui disait-il, avoir lu, depuis Santeuil, des strophes mieux assemblées et des vers latins plus harmonieux. » Le cardinal Caprara, en même temps qu'il envoyait au Saint-Père l'ode sur le rétablissement du culte, écrivait aussi à l'auteur pour le complimenter du succès avec lequel il employait sa plume à célébrer les triomphes de l'Église. Voici enfin une charmante lettre de Fontanes, le premier grand maître de l'Université, qui montre combien le talent et le caractère du poëte lui valaient de nobles sympathies :

« Quand Auguste revient, il est juste de revoir Horace. Il chantait comme vous le rétablissement des autels, des mœurs et des lois, après les guerres civiles. Vous avez retrouvé sa lyre, et, plus heureux que lui, vous n'avez pas à dire de vous-même :

Parcus Deorum cultor et infrequens, etc.

» Je vous remercie des beaux vers que vous m'avez envoyés. Je souhaite bien que votre exemple fasse renaître le goût de cette belle langue.

» Puisque vous êtes le successeur d'Horace, permettez que je finisse à la manière de son temps :

» *Vale et me ama.*

» FONTANES. »

Les littératures classiques n'avaient pas été le seul objet des occupations de M. Cauchy; il s'était aussi

adonné, vers la fin de sa vie, à l'étude de l'hébreu et des anciens idiomes de l'Orient; il avait même réalisé à ce sujet des recherches importantes et vraiment originales. Son âge avancé ne lui a pas permis de mettre sous une forme définitive le résultat de ses patientes recherches; ce soin était réservé à son fils Eugène qui, après avoir complété les études de son père par des études personnelles, publiera bientôt, nous l'espérons, le résultat commun de leurs travaux. Déjà de son vivant, Augustin avait donné à cette œuvre l'aide de sa haute intelligence; on verra plus loin un résumé de ses propres recherches sur ce sujet.

On comprend assez, par ce qui précède, combien M. Cauchy était admirablement préparé pour remplir la tâche si délicate et si douce qui, par nécessité, par devoir, par amour paternel, allait occuper les loisirs que la Révolution venait de lui faire.

CHAPITRE II.

L'ÉDUCATION.

Conserva, fili mi, præcepta patris tui
et ne dimittas legem matris tuæ.
LIBER PROVERB., VI, 20.

M. Cauchy se retire à Arcueil avec sa famille. — Il entreprend l'éducation de ses fils. — Détails sur cette éducation. — Son caractère chrétien. — Jugement porté par Lagrange sur Cauchy encore enfant. — Grand-prix du concours général. — Première communion de Cauchy. — Il commence l'étude des Mathématiques. — Il entre à l'École Polytechnique. — Ses succès dans cette Ecole et à celle des Ponts et Chaussées.

L'éducation d'Augustin Cauchy fut, dès l'enfance, l'objet de soins extrêmes, et la méthode suivie pour le développement de ses études peut être proposée aux pères de famille comme un modèle. Par un heureux concours de circonstances, il trouva réuni dans la maison paternelle ce qui fait le charme et la douceur de l'éducation privée, avec ce qui constitue le nerf et la vigueur de l'éducation publique.

On traversait alors la période la plus terrible de la crise révolutionnaire; les études étaient abandonnées et les écoles fermées; les savants proscrits fuyaient au loin ou périssaient sur l'échafaud. Mais les commotions politiques de cette époque, qui furent si funestes à la jeunesse en la privant du bienfait que procurent des études régulières, eurent au contraire pour le jeune Augustin un résultat favorable, en lui ménageant dans la retraite les

ressources les plus précieuses. Il devait y trouver ce qu'on recherche surtout dans l'éducation du collége : le choix d'un maître habile et l'excitation d'un émule studieux.

Afin de soustraire sa famille au danger des émeutes qui faisaient alors de Paris un séjour si agité, M. Cauchy père avait cherché un refuge dans une campagne qu'il possédait au village d'Arcueil. Ce fut là qu'il passa les plus mauvais temps de la Terreur. Mais s'il put y échapper aux cruelles réactions des violences politiques, il subissait, comme toute la France, le contre-coup des lois de *maximum* et des mesures arbitraires qui avaient réduit tant de familles à la disette et à la gêne. On peut en juger par le passage suivant d'une lettre à sa mère : « Avec quelque peu de biscuit et de riz qu'on nous distribue, lui écrivait-il à Rouen, nous suppléons au pain dont nous n'avons que demi-livre, et point du tout quelquefois. Force haricots et pommes de terre font notre bonne chère. Du reste, nous nous portons bien, ce qui est l'essentiel et qui prouve que peu de chose suffit aux besoins de l'homme. » Un peu plus loin, il tâche de la tranquilliser au sujet de ses petits-enfants : « Je vous dirai que pour faire de la bouillie à mes enfants, il me reste encore un peu de très-belle farine de blé de Turquie récolté dans mon jardin, et dont j'avais fait moudre trois boisseaux; plus quelques livres de fécule de pommes de terre, blanche comme la neige et très-bonne, surtout pour la première enfance. C'est encore un produit de ma récolte. » On voit par là que M. Cauchy prenait avec philosophie, et même avec gaieté, son parti du malheur des temps que son industrie paternelle savait alléger. Cependant il en résultait pour tous une souffrance réelle, et, au dire de sa mère, Augustin se ressentit longtemps des privations qu'il avait dû supporter à cette époque de sa vie.

Les soins empressés du père étaient donc là tout prêts pour attendre les premiers développements de l'intelligence de ses deux fils, Augustin et Alexandre, et pour en suivre les progrès avec un zèle infatigable. Former à la fois l'esprit et le cœur de ses disciples fut l'objet constant de ses efforts. Pour se proportionner à leur âge, l'ancien prix d'honneur de l'Université de Paris se remit à étudier avec eux la grammaire et à reprendre tout le cours des études classiques. Il composait pour eux de petits traités didactiques dans lesquels il leur traçait leurs devoirs d'écoliers, et leur exposait, dans un langage simple et familier, mais en même temps noble et élevé, les leçons de la grammaire, puis celles de l'histoire, et surtout celles de la morale et de la vertu. Afin de mieux graver ces leçons dans la mémoire de ses chers élèves, il les exprimait ordinairement en vers français écrits avec une élégante facilité. Ces petits traités, qui ont été conservés religieusement dans la famille, nous apparaissent aujourd'hui comme le programme de cette belle vie qui devait, pour Augustin, se partager entre les lettres, dont son vénérable père lui transmettait les préceptes et le goût, les sciences, pour lesquelles la nature l'avait formé, et la vertu, dont il voyait autour de lui les plus touchants modèles.

Son éducation fut, avant tout, essentiellement chrétienne. En homme profondément convaincu des vérités religieuses et qui savait y conformer scrupuleusement sa vie, M. Cauchy père ne pouvait pas comprendre l'éducation sans la foi ; aussi, dès l'origine, il s'appliqua à inculquer à ses fils l'amour de Dieu, le culte des choses saintes et un respect inébranlable pour les grandes lois de la morale suivant l'Évangile. Il connaissait trop bien les avantages des bonnes études classiques et tout ce qu'on

gagne, sous le rapport de l'élégance et du goût, dans le commerce des grands écrivains de l'antiquité, pour ne pas initier ses élèves à l'étude de leurs chefs-d'œuvre; mais en même temps il avait pris pour règle de mêler à toutes ses leçons un souvenir pieux, une sentence chrétienne, de peur, sans doute, que leur esprit, séduit par la forme brillante de ces auteurs, ne pût s'égarer à croire que le beau doit être considéré et étudié uniquement en lui-même et indépendamment de la source divine dont il émane. Chaque devoir avait pour épigraphe un verset de la Bible, ordinairement tiré du livre des *Proverbes* ou de celui de la *Sagesse*. On y rencontre par exemple ces touchantes maximes :

Conserva, fili mi, præcepta patris tui et ne dimittas legem matris tuæ.
Nihil proderunt thesauri impietatis, justitia vero liberabit à morte.

Ces textes bibliques étaient comme une semence précieuse confiée chaque jour à l'esprit des élèves et comme l'assaisonnement et le sel qui empêchent les meilleures choses de se corrompre.

Dans ces soins si paternels et si vigilants on reconnaissait presque déjà le cœur d'une mère. Mme Cauchy, de son côté, y avait sa grande et légitime part. Cette admirable femme, qu'on pourrait vraiment comparer à la femme forte des livres saints, exerça sur ses enfants la plus douce et la plus heureuse influence. Augustin conserva toujours pour elle, avec les sentiments de l'amour filial le plus vif, une confiance absolue dans sa prudence et sa haute raison. Ce qu'il ressentait pour son père tenait plutôt de l'hommage et du respect; ce qu'il éprouvait pour sa mère se rapprochait davantage d'une tendresse expansive et affectueuse. Lorsque, dans le cours de sa jeunesse, il se trouve embarrassé et sent le besoin d'une

direction, c'est à sa mère qu'il s'adresse et qu'il demande des conseils; même à de grandes distances, il n'entreprendra rien d'important sans avoir auparavant son avis.

L'émulation ne devait pas, elle-même, faire défaut à l'éducation d'Augustin. Ce stimulant, qu'on ne rencontre d'ordinaire qu'au collége et qui constitue un des grands avantages de l'éducation publique, il devait le trouver dans son frère plus jeune, Alexandre, dont le séparaient à peine trois années, et qui annonçait également les plus heureuses dispositions, avec quelques nuances charmantes de caractère. L'un était plus pensif et plus appliqué, l'autre plus vif et plus ardent aux jeux de son âge. Tous deux avaient le travail également facile, mais aux heures de récréation on les distinguait. Augustin se faisait prier pour y prendre part; Alexandre aimait mieux réserver pour l'âge mûr les soucis et les préoccupations.

L'humble toit d'Arcueil, où se passaient ces touchantes scènes de famille, était voisin des campagnes plus somptueuses habitées par Laplace et Berthollet, et où se réunissait sous le premier Empire l'élite des savants de Paris. Ils y avaient organisé une véritable académie et s'y livraient en commun à d'importants travaux. Les *Mémoires de la Société d'Arcueil* sont restés célèbres et témoignent de l'activité et du talent de ses membres. Laplace et Berthollet étaient l'âme de cette réunion, chacun avec son caractère et la tournure particulière de son esprit. Laplace, tout en restant poli et bienveillant, conservait la tenue et la dignité d'un grand seigneur; Berthollet était plus simple, mais un peu rude, et affectait volontiers des habitudes singulières et bizarres; tous deux se ressemblaient par un dévouement commun à la science et à ceux qui la cultivaient. Aussi une grande intimité régnait entre les deux voisins; leurs maisons étaient presque com-

munes; afin de communiquer plus facilement de l'une avec l'autre, ils avaient fait pratiquer une porte mitoyenne dont chacun avait la clef.

M. Cauchy se trouva naturellement en relation de voisinage, et bientôt d'amitié, avec les deux illustres savants, et son fils fut ainsi admis de bonne heure dans la société des hommes qui devaient, un peu plus tard, encourager ses débuts. Laplace, élevé à la dignité de chancelier du Sénat et devenu, par l'âge et par le génie, le doyen des savants de son temps, se souviendra toujours du jeune écolier et lui accordera avec libéralité ses conseils et son appui.

Dès l'âge consacré aux études d'humanités, on vit apparaître chez Augustin Cauchy les premières lueurs de son génie scientifique. Les éléments du calcul et de la Géométrie avaient évidemment pour lui un attrait exceptionnel, comme le témoignent ses anciens cahiers d'étude. En les parcourant, il n'est pas rare de rencontrer un devoir littéraire interrompu tout à coup; une idée mathématique a traversé l'esprit de l'élève et il s'empresse de la traduire par des chiffres ou par des figures. Ces dispositions précoces ne tardèrent pas à se faire connaître dans le monde de la science. M. Cauchy père, devenu secrétaire général du Sénat, était en rapport habituel avec les membres de ce grand corps. Il retrouvait là et M. Laplace, son voisin d'Arcueil, et aussi l'illustre Lagrange, qui portait au jeune Augustin le plus vif intérêt. En se rendant au palais du Luxembourg, Lagrange y rencontrait ordinairement le studieux écolier qui avait alors pour salle d'étude le cabinet même de son père. Avec son coup d'œil exercé, il avait pu apprécier ses rares dispositions pour les sciences; il avait été surtout frappé de son aptitude pour les questions d'analyse. Un jour

qu'il se trouvait chez M. Cauchy en compagnie du comte de Lacépède et de plusieurs autres membres du Sénat, il lui arriva de leur dire : « Vous voyez ce petit jeune homme, eh bien! il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres. » On était alors en 1801 et Cauchy avait à peine douze ans. Toutefois Lagrange se préoccupait du danger que pouvaient courir ces dispositions précoces, si leur développement était trop hâté par une application prématurée. Il insistait souvent sur ce point : « Ne laissez pas, disait-il à M. Cauchy, cet enfant toucher un livre de Mathématiques avant l'âge de dix-sept ans. » Dans une autre circonstance, il lui disait encore : « Si vous ne vous hâtez de donner à Augustin une solide éducation littéraire, son goût l'entraînera, il sera un grand mathématicien, mais il ne saura pas même écrire sa langue. »

L'illustre savant était mieux que personne en état de formuler un avis à ce sujet. C'est en effet à l'âge de dix-sept ans seulement qu'il avait quitté, pour l'étude des sciences, celle des classiques pour laquelle s'était passionnée son enfance. Ce retard, comme on le sait, loin de nuire aucunement au développement de ses facultés naturelles, lui avait au contraire procuré l'immense avantage de joindre à son génie mathématique un remarquable talent d'écrivain et une rare élégance dans l'exposition des théories les plus abstraites. M. Cauchy, dont les lettres avaient fait la consolation pendant des jours mauvais, et qui célébrait maintenant leur renaissance par ses essais poétiques, n'eut garde, on le pense bien, de négliger des avis aussi sages et aussi conformes à ses vues personnelles.

Après avoir complété, sous la direction de son père, le cours de ses études élémentaires, Augustin fut envoyé

à l'École centrale du Panthéon, alors fréquentée par les meilleurs élèves et dirigée par des maîtres habiles. Il y obtint promptement des succès exceptionnels, présage de ceux qui devaient, par la suite, signaler sa carrière.

Lorsque le premier Consul arriva au pouvoir, l'une de ses grandes préoccupations avait été de reconstituer l'Instruction publique. Afin d'établir un moyen puissant d'émulation entre les diverses maisons d'enseignement, et en même temps pour consacrer la culture simultanée des sciences, des lettres et des arts, on venait d'inaugurer (arrêté du 30 fructidor an X) une forme particulière et plus solennelle de concours. En présence de l'Institut en corps, et dans la salle publique de ses séances, le Ministre lui-même procédait à une distribution générale de prix aux élèves de l'École spéciale de médecine, à ceux des Écoles centrales, du Lycée impérial, du Prytanée français, enfin aux élèves des Écoles spéciales de peinture, de sculpture et d'architecture et du Conservatoire de musique. L'objet des prix était ainsi défini dans un discours prononcé par le Directeur de l'instruction publique, M. Arnault, élu depuis secrétaire de l'Académie française : « Aux récompenses annuellement réparties dans l'intérieur de chaque établissement, le gouvernement a joint des récompenses plus éclatantes dont la distribution est l'objet de cette solennité. Les premières ont été données à un succès; les secondes à une suite de succès. Les unes sont le fruit d'un effort heureux; les autres d'un effort constant. Les unes couronnent le travail d'un jour; les autres le travail d'une année, et vont signaler, non celui qui a été une fois vainqueur, mais celui qui l'a été le plus souvent. »

Augustin Cauchy recueillit dans ces concours une abondante moisson de couronnes. Dès l'année 1803, à la

première distribution générale des prix, il avait obtenu le premier accessit de composition latine; l'année suivante, le succès fut complet et éclatant. Il remportait le second prix des vétérans en discours latin, le premier prix de vers latins et le premier de version grecque. Il recevait enfin un prix spécial, intitulé : *grand prix d'humanités*. C'était le prix national dont il a été parlé tout à l'heure; on le décernait, au nom du chef de l'État, à celui des élèves des Écoles centrales qui s'était le plus distingué dans les classes supérieures et qui avait remporté le plus grand nombre de succès.

C'est ainsi qu'Augustin Cauchy, à peine âgé de quinze ans, termina avec éclat ses études classiques, et qu'il put, comme il nous le raconte poétiquement dans une préface inédite, dont le style rappelle celui de Lagrange, « cueillir quelques fleurs sur les tombes d'Homère, d'Horace et de Virgile, avant de s'engager sur les traces d'Euclide. »

Cette même année (1804) devait marquer de plus d'une manière dans la vie de Cauchy; car ce fut aussi l'époque de sa première communion. Il se prépara à cette action importante avec toute l'ardeur et tout le recueillement d'une âme déjà consommée dans la foi. Ordinairement ces scènes intimes de la vie chrétienne restent cachées à tous les yeux, et le voile de l'humilité recouvre les élans généreux d'un cœur qui s'unit pour la première fois à son Dieu. Dans cette circonstance, toutefois, on nous permettra de citer une preuve touchante des sentiments religieux du jeune étudiant; c'est une lettre écrite longtemps après par sa mère à l'une de ses petites-filles. Pour cette dernière aussi était venu le moment de faire sa première communion, et de s'initier aux grands mystères de la religion. Sa grand'mère, dans sa pieuse sollicitude, avait cherché par quels conseils et par quels exemples elle pourrait dis-

poser plus efficacement l'âme et le cœur de la jeune enfant; elle ne trouva rien de plus édifiant ni de plus persuasif que de lui offrir l'exemple même de son oncle. Elle le fit dans une lettre que nous rapporterons sans y rien changer; on aime à y respirer cet air naïf et pur de la famille.

« Ma chère enfant, je t'ai promis de t'envoyer la copie des *Résolutions* de ton oncle Augustin, qui t'édifieront beaucoup et t'encourageront à donner sincèrement ton cœur au Bon Dieu. Ton oncle a pris ces résolutions à ton âge tout juste; il avait alors beaucoup de défauts dans le caractère, mais il avait le cœur bon, l'esprit droit, et beaucoup de courage pour se corriger. Dieu a béni sa bonne volonté et *lui a donné la joie de la vertu.* Tu verras par ses résolutions mêmes qu'il était occupé du grand travail de sa rhétorique, ce qui l'a empêché de faire sa première communion à Pâques; mais cependant, ayant suivi les catéchismes autant que possible, il a reçu la confirmation après la Pentecôte, puis a fait sa première communion comme un ange, le jour de l'Assomption. Il avait eu cependant huit jours de travail pour les grands concours qui lui ont valu tant de prix et de couronnes, tout en conservant son cœur à Dieu pour le jour de cette grande action, et sans se laisser distraire par l'inquiétude ou l'espoir d'avoir ou non des succès. Deux jours après, il a reçu toutes les couronnes du collége et du Concours général, il a été dîner chez le Ministre pour ses prix de rhétorique, n'ayant que quatorze ans, et il a toujours conservé, avec tout son mérite, cette religion, cette droiture, cette simplicité de mœurs qui le rendent cher à ceux qui le connaissent, ainsi que sa confiance en Dieu, qui l'a toujours soutenu dans les temps de malheur. »

A cette lettre étaient jointes en effet les *Résolutions*

du jeune Augustin, on y remarque surtout le passage suivant, qui emprunte aux lignes précédentes un intérêt tout particulier.

§ 19. « Je ne me vanterai jamais du peu de science que j'ai acquis par les soins de mon père, me représentant d'abord que si je sais quelque chose, c'est uniquement à cause des soins que mon père a pris de moi et que, s'il ne se fût donné la peine de m'instruire, je serais aussi ignorant que beaucoup d'autres enfants; ensuite, que les sciences humaines ne sont rien au prix de celle du salut et qu'il ne me servirait de rien de les connaître toutes si je n'avais cette dernière. »

Ces courtes mais sages paroles renferment en quelque sorte le programme et le résumé de toute la vie de Cauchy. Jamais il ne les oubliera; il ne cessera jamais de pratiquer cette simplicité dans la science, cette modestie dans la piété, qui brillaient déjà d'un si vif éclat dans sa jeunesse et qui devaient constituer par la suite l'un des traits les plus saillants de son caractère.

Cependant le moment était venu pour lui d'aborder enfin sérieusement l'étude des Mathématiques. Il le fit avec toute l'ardeur d'un esprit prudemment contenu et avec tout le succès d'une intelligence supérieure. Ses progrès furent très-rapides sous l'habile direction de M. le professeur Dinet, qui devint à cette occasion l'ami de la famille dont il était le voisin à Arcueil. Au bout de huit à dix mois, Augustin se trouvait en état de se présenter à l'École Polytechnique, et y était reçu, en 1805, le second, à l'âge de seize ans.

On possède peu de détails sur le séjour de Cauchy à cette école. On sait seulement qu'il justifia toutes les espérances de ses parents et de ses maîtres, et qu'il acquit bientôt sur ses condisciples une supériorité incon-

testée. Les études aussi nombreuses que variées dont se composait l'enseignement ne lui permettaient guère de se livrer à des recherches personnelles; il lui arriva cependant, en diverses circonstances, de trouver des solutions plus élégantes et plus simples pour des questions délicates. On cite par exemple la question du cercle tangent à trois cercles donnés. Quoique ce problème appartienne à la partie élémentaire de la science, il offre une difficulté réelle, et plusieurs savants distingués n'ont pas dédaigné de s'y exercer. La solution que Cauchy en donna est regardée encore aujourd'hui comme la meilleure et est habituellement adoptée dans les cours.

La vie des grandes écoles n'est pas sans danger pour les jeunes gens; il en est beaucoup qui s'y laissent séduire par le prestige des fausses maximes et par l'entraînement des mauvais exemples. Cauchy sortit vainqueur de cette épreuve, et pour cela il prit la route la plus sûre; dès le premier moment il se montra tel qu'il était, chrétien avec sincérité et pieux sans détour. Hâtons-nous d'ajouter qu'il se fit accepter facilement par ses camarades, à l'égard desquels il se montrait toujours obligeant et bienveillant. C'est d'ailleurs pour un homme, dans toutes les circonstances de la vie, le fait d'une conscience droite et en même temps d'une habile politique, que de savoir courageusement brûler ses vaisseaux et couper court, par une profession de foi bien nette, à tous les retours et à toutes les équivoques. Les incrédules pourront peut-être hasarder quelques critiques malveillantes, quelques plaisanteries d'un goût douteux; mais cela ne dure pas, et la sincérité des convictions finit bientôt par conquérir l'estime et le respect.

La religion de Cauchy n'avait du reste rien d'exagéré ni de provoquant; elle était douce, aimable et tolérante.

Mais il ne dissimulait rien, et s'acquittait comme dans sa famille de ses pratiques de piété. On pouvait le voir, matin et soir, au milieu de l'indifférence générale, modestement agenouillé au pied de son lit et répétant, dans le recueillement, les prières qu'il avait apprises autrefois sur les genoux de sa mère. La manière dont il s'acquittait de ce devoir semblait si naturelle, qu'on eût pu croire qu'il était écrit, comme les heures d'étude, dans la règle de l'école, et jamais il ne vint à l'esprit de ses camarades de l'inquiéter à ce sujet. Il faut bien dire aussi que son mérite hors ligne servait heureusement de passeport à sa piété; la supériorité de l'intelligence faisait accepter volontiers celle de la vertu.

Après les deux années d'études réglementaires, Cauchy quitta l'École Polytechnique pour celle des Ponts et Chaussées où il entra le premier en 1807. La supériorité qu'il avait déjà acquise ne fit que s'établir davantage. Dès son entrée, il remportait un succès jusqu'alors sans exemple; dans quatre concours il obtenait le premier rang, non-seulement sur les élèves de son année, mais même sur ceux de la promotion antérieure. Ce rang ne lui fut jamais disputé sérieusement; aussi à sa sortie de l'École des Ponts et Chaussées, on le distingua entre tous, et quoiqu'il eût à peine vingt ans, on le désigna aussitôt pour remplir des emplois importants qu'on ne confie d'ordinaire qu'à des hommes d'un âge mûr et d'une expérience éprouvée. C'est de cette époque que date véritablement sa carrière d'ingénieur et de savant; nous allons maintenant le suivre dans cette nouvelle phase de sa vie.

CHAPITRE III.

SÉJOUR A CHERBOURG.

Bonum est viro cum portaverit jugum
ab adolescentiâ suâ.
JÉRÉMIE, *Lament.*, 3-27.

Augustin Cauchy est envoyé à Cherbourg comme ingénieur. — Ses travaux pour l'établissement des ports. — Il reprend l'étude des Mathématiques et compose des Mémoires. — Il s'occupe d'enseignement, de Botanique, d'essais littéraires. — Sagesse de sa conduite. — Correspondance avec sa famille. — Il revient à Paris.

Au sortir de l'École des Ponts et Chaussées, Cauchy remplit d'abord les fonctions d'aspirant ingénieur et fut employé, à ce titre, aux travaux du canal de l'Ourcq (aqueduc de la rue Saint-Denis) sous les ordres de M. l'ingénieur en chef Girard. On le trouve ensuite associé aux travaux du pont de Saint-Cloud, sous la direction de M. Beautemps-Beaupré. Le talent avec lequel il s'acquitta de ces premières fonctions le fit bientôt désigner pour une mission plus importante.

On se rappelle les vastes desseins de l'Empereur à l'égard de l'Angleterre. Boulogne avait d'abord été le centre de ses tentatives et de ses projets. C'est là qu'après la rupture de la paix d'Amiens il avait organisé ce plan de campagne qui devait aboutir à une descente chez nos voisins. La guerre d'Autriche vint le surprendre au milieu de ses préparatifs et faire éclater ailleurs les foudres qu'il tenait suspendues sur l'Angleterre; mais il n'avait

pas renoncé à son premier plan et n'avait pas cessé de tout préparer en vue d'une guerre maritime. Dans cette éventualité, un immense établissement devait être créé à Cherbourg, afin de servir à la fois pour l'attaque et la défense. Il fallait pour cela réaliser de gigantesques travaux; il fallait conquérir pas à pas sur l'Océan les bassins et les ports; il fallait construire à grands frais des digues et des jetées capables de résister à la fureur des flots; aussi pendant quelque temps toute l'activité des travaux maritimes se trouva concentrée sur le port de Cherbourg. L'œuvre commencée par Louis XVI se poursuivit, avec les immenses ressources du régime impérial, sous l'influence de cette volonté énergique qui se faisait un jeu des obstacles et qui, à défaut de flottes pour reprendre la lutte avec l'Angleterre, se consolait de son impuissance en luttant contre l'Océan lui-même par des ouvrages dont le succès semblait déjà un premier pas fait pour reconquérir l'empire des mers.

Aucun aspirant ingénieur ne devait faire partie du personnel chargé de l'exécution des travaux; une seule exception fut admise : M. le comte Molé, directeur général des Ponts et Chaussées, la fit en faveur de Cauchy, qu'il plaça sous les ordres de M. Cachin, directeur en chef des travaux de Cherbourg. Il prévoyait déjà que l'étude exclusive des sciences mathématiques enlèverait bientôt le jeune débutant à la carrière active des travaux publics; il connaissait à cet égard ses goûts et ses aptitudes. Mais ce fut là probablement le motif même qui le décida. A cause de la grandeur inusitée de l'entreprise, on ne pouvait se contenter de l'expérience du passé; il était nécessaire de recourir à des calculs spéciaux et à des recherches théoriques nouvelles. Telle devait être la tâche de Cauchy; il s'en acquitta avec distinction et profita avec

empressement de cette circonstance pour s'essayer à la fois dans la pratique des grandes constructions et dans les spéculations théoriques propres à en faciliter l'exécution.

Augustin Cauchy partit pour Cherbourg dans le courant du mois de mars 1810, léger de bagage, mais plein d'ardeur et d'espérance. Il avait placé au fond de sa malle la *Mécanique céleste* de Laplace et le *Traité des Fonctions analytiques* de Lagrange; c'était tout un programme d'études scientifiques. Il gardait sur lui deux volumes d'un genre tout différent : son *Virgile* et son livre de l'*Imitation*, témoignant ainsi qu'il voulait rester fidèle au culte des lettres, et surtout rester chrétien. Ces deux volumes devaient être pour lui de véritables amis de voyage. De temps à autre il interrompait sa lecture pour observer ou plutôt pour étudier le pays. La beauté des sites, la variété des paysages, n'étaient pas l'unique objet de ses remarques; la nature du sol et de ses productions, les divers modes de construction et de culture attiraient successivement son attention. Les réflexions fines et précises consignées à ce sujet dans ses lettres auraient pu facilement être attribuées à un homme qui aurait étudié à fond ces provinces, plutôt qu'à un voyageur qui venait simplement de les traverser en diligence.

A peine arrivé, Cauchy fut associé à la direction des travaux. Les bassins du port militaire à creuser par le fer et le feu dans le roc vif; la construction de la digue à continuer avec des blocs détachés par la mine; les épuisements nécessités, jour et nuit, par les fondations jetées au sein de la mer; une ligne de sémaphores à établir sur le rivage, des baraquements provisoires et des casernes en granit à bâtir, soit pour nos soldats, soit pour les pri-

sonniers de guerre : tels étaient les ouvrages aussi vastes que variés dont le génie militaire avait à préparer les plans et à surveiller l'exécution. Cauchy prit une large part à tous ces travaux et ne cessa d'y développer une rare activité, comme le montrent les lettres qu'il adressait à sa famille. En voici une, à la date du 3 juillet 1811, où il raconte ses occupations du moment.

« Je me lève à 4 heures du matin et je suis occupé du matin au soir. Ma besogne ordinaire s'est trouvée augmentée dans ce mois par l'arrivée subite des prisonniers espagnols. On en a été prévenu seulement huit jours à l'avance, et il fallait, pendant ces huit jours, bâtir des logements et préparer des lits de camp pour douze cents hommes. Les logements consistent en deux corps de bâtiment de 360 pieds de long sur 45 de large, contenant chacun dix-neuf salles, et en tout trente-huit salles. Douze salles étaient préparées; il fallait en préparer douze autres, dont les murs n'étaient pas encore élevés à leur hauteur. Nous n'avions pas d'ardoises, j'ai été visiter les carrières des environs; nous n'avions pas de cuisines, j'ai fait faire des fourneaux provisoires. Enfin nos Espagnols sont logés et couverts depuis deux jours. Ils ont des lits de camp, de la paille, de la nourriture et s'estiment fort heureux. Je n'ai pas eu plutôt terminé ce travail, qu'il a fallu s'occuper d'un autre. Aujourd'hui j'ai tracé des forges que je vais faire exécuter en granit. Je fais aussi construire deux phares sur les môles d'entrée.

» Le travail ne me fatigue pas; au contraire il me fortifie et je suis en parfaite santé. »

Des occupations aussi considérables auraient dû, ce semble, l'absorber tout entier, et pourtant il trouvait déjà du temps pour se livrer à des travaux scientifiques. C'est de son séjour à Cherbourg que datent ses premières

découvertes, dont il sera parlé un peu plus loin. Il commença par reprendre d'une manière méthodique l'étude des Mathématiques. Jusqu'alors il les avait étudiées comme élève sous la direction de ses maîtres; il va maintenant s'y remettre avec un esprit indépendant. Lui-même nous apprend, dans une lettre à la date du 10 décembre 1810, comment il entreprit « de repasser par une étude suivie toutes les branches des Mathématiques, en commençant par l'Arithmétique et finissant par l'Astronomie; éclaircissant de son mieux les endroits obscurs, s'appliquant à simplifier les démonstrations et à découvrir des propositions nouvelles. »

Des loisirs, il en trouvait encore pour s'initier à l'exercice de l'enseignement. Des jeunes gens studieux, des candidats aux écoles spéciales venaient, sous une forme officieuse, lui demander des explications et des conseils : plusieurs d'entre eux, qui manquaient de fortune, reçurent de lui des leçons régulières et gratuites; il lui arrivait même, « par amour des lettres, » comme il le disait, de leur apprendre le latin. Souvent aussi il se laissait charger par le maire de la ville des examens aux écoles primaires; œuvre de dévouement où aucun intérêt scientifique ne venait compenser l'ennui d'une tâche ingrate. C'est ainsi que Cauchy préludait à ces fonctions du professorat qu'il devait remplir plus tard avec tant d'éclat.

Il n'y avait pas jusqu'au temps accordé au repos et à la récréation qui ne fût employé utilement. L'histoire naturelle avait été, dès ses premières années, l'un des objets de ses études; c'était encore l'occupation de ses promenades, lorsque, après une journée de travail, il allait parcourir la campagne ou bien errer sur les grèves de la mer. On trouve, à ce sujet, quelques détails intéressants dans une lettre adressée à son père, à la date du 8 juin 1810 :

« Les travaux du port Napoléon deviennent de plus en plus importants et mes occupations sont très-instructives. J'ai cependant de temps en temps quelques moments de loisir, dont je profite pour aller visiter les environs de Cherbourg. Il y a ici des points de vue très-agréables. Un des plus pittoresques est la vallée de Quincampoix. Une petite rivière, sur laquelle sont établies plusieurs usines, serpente dans cette vallée parmi de superbes prairies couvertes de pommiers en fleurs. On n'aperçoit son eau limpide qu'à travers l'épais feuillage d'un grand nombre d'arbustes qui forment un berceau de verdure au-dessus d'elle. Les prairies sont bordées, d'un côté, de bois taillis remplis de fougères et de plantes de toute espèce, et, de l'autre, par d'immenses rochers dont les pointes s'élèvent dans les airs ou restent suspendues au-dessus du vallon. Parmi les plantes qu'on trouve en abondance dans ce pays, j'ai remarqué la digitale, des orchis blancs à feuilles tigrées, des orchis à fleurs rouges, plusieurs plantes grasses et beaucoup de fougères. Outre la fougère nommée *polypode*, qui couvre en forme de chaperon tous les murs de la ville, on trouve très-communément une fougère en arbre dont les feuilles sont vernissées et décomposées à l'infini ; une autre fougère qui ressemble à la précédente sans former un arbre comme elle; la fougère appelée *langue de bœuf;* une autre à peu près semblable, mais découpée; une autre rampante; enfin celle dont je vous ai envoyé quelques feuilles par lettre. J'ai aussi trouvé en me promenant quelques insectes rares, tels que la *cardinale* et la *chevrette bleue*. Vous voyez que j'ai ici, presque sans quitter la ville, tous les plaisirs de la campagne. »

Enfin on serait bien étonné si le lauréat des Concours généraux avait négligé le culte des lettres, source de ses premiers triomphes. Sa correspondance montre qu'il

trouvait encore du temps pour se livrer à des exercices poétiques. Dans une lettre à sa mère (août 1810) il décrit :

Ces immenses bassins qui sans cesse résonnent
Sous les coups de l'acier,
. . . . . .
. . . Ces réservoirs, ces digues, ce barrage
Des flots toujours vainqueur,
Qui contient l'Océan, l'aquilon et l'orage,
Et brave leur fureur.

S'il écrit à son père, il reprend la lyre d'Ovide. Son frère Alexandre était venu le voir à Cherbourg; il le charge de raconter ses travaux :

Ille tibi nostros fidus narrare labores
Gestiet et verbis reddere visa suis.
Rupibus excisos portus, molemque docebit
Inclusam scopulis, oppositamque mari;
Ut solida exsiliant, accenso sulfure, saxa,
Ut ferro resonet percutiente silex;
Sæpius ut fuerit Thetys indignata sub undis
Effossos hominum viribus esse lacus.

Le sentiment vif et imagé de ces vers se retrouve jusque dans sa prose. Il essaye dans une autre lettre de dépeindre les fureurs d'une mer orageuse. « Les tableaux de Vernet, dit-il, peuvent en donner une idée lorsqu'elle est calme, mais non pas quand elle est agitée. Ils n'apprennent pas comment, après avoir frappé les rochers, la vague se retire et s'éloigne, pour revenir plus furieuse et plus terrible au point d'où elle était partie; comment, à la rencontre des lames renvoyées par les rochers et de celles qui viennent du large, l'onde s'élève et se brise en promenant une longue traînée d'écume sur le rivage. »

Ainsi, au milieu des occupations les plus variées et des travaux les plus difficiles, Augustin Cauchy trouvait en-

core du temps pour s'exercer dans tous les genres d'étude. Grâce à la remarquable flexibilité de son esprit, il passait de l'un à l'autre sans difficulté et sans effort; la même plume qui venait de tracer l'épure d'une construction ou d'analyser un calcul compliqué, servait, un instant après, à écrire une page de littérature ou à composer un essai poétique. Les fonctions de l'ingénieur ne souffraient aucunement de ces passe-temps studieux; le zèle et le talent avec lesquels il s'en acquittait le firent considérer, dès le début, par ses supérieurs, comme l'un des membres les plus capables du corps des Ponts et Chaussées, et comme appelé à en devenir l'une des illustrations. Peu de temps après son départ de Cherbourg (en 1813), son ingénieur en chef, M. Cachin, lui écrivait une lettre où l'on voit toute l'estime qu'il faisait du talent et du caractère de son jeune collègue.

« C'en est donc fait, mon jeune camarade, l'Océan a pris possession de nos travaux..... et vous n'y étiez pas! Votre absence a fait renaître tous mes regrets, et l'espoir seul de votre plus grand bonheur peut les alléger. J'ai appris avec satisfaction le meilleur état de votre santé. J'espère que bientôt, plus près de vous, je pourrai vous entretenir de mes vœux pour que vous ne cessiez pas d'être attaché à un corps qui vous considère, à bien juste titre, comme l'un de ses membres les plus distingués, et dans lequel vous trouverez toujours de vrais amis. Je m'estimerai heureux d'être de ce nombre et de vous offrir dans toutes les circonstances des témoignages de l'inaltérable dévouement que je vous ai voué. »

La réputation de Cauchy commençait même à s'étendre plus loin, comme on peut en juger par une lettre du célèbre de Humboldt à M. Cauchy père. Ce dernier lui avait envoyé, dans le temps de la mission de son fils à

Cherbourg, une pièce de poésie latine intitulée : *Les prédictions de Nérée*. Dans sa réponse, de Humboldt lui adresse ce compliment de bon goût dont le germanisme n'exclut pas l'élégance et l'atticisme : « C'est, écrivait-il, un spectacle touchant de voir le père chanter si noblement cet élément redoutable dont le fils sait calculer et dompter les efforts. »

Pénétrons maintenant dans la vie privée du jeune ingénieur; elle ne craint pas qu'on y porte le flambeau. Grâce au soin avec lequel sa mère a conservé toutes les lettres qu'elle recevait de lui, gardant aussi copie de ses réponses, on peut dire que, pour Cauchy, les communications intimes de la vie de famille n'ont presque pas été interrompues par l'absence. Les détails dont cette intéressante correspondance est remplie permettent de suivre presque jour par jour tout ce que pensait et faisait le fils. On le retrouve à ses longues heures de travail comme à ses courts intervalles de repos; dans son cabinet d'étude comme dans ses ateliers du grand port; dans son modeste intérieur de jeune homme comme dans les sociétés où l'accueillaient si bien ses supérieurs devenus bientôt ses amis. Sachant qu'il n'est rien dans la vie d'un fils absent qui n'intéresse une mère, il ouvrira à la sienne l'intérieur de sa maison comme celui de son cœur; il lui fera part de ses contrariétés et de ses joies, de ses espérances et de ses regrets. Sans s'occuper de la distance qui le sépare et voulant que, non-seulement son affection, mais sa déférence n'en souffre pas, il consulte sans cesse sa mère, à quatre-vingts lieues, sur des points au sujet desquels on négligerait souvent de demander conseil tout près de soi. Et ce n'est pas une seule correspondance qu'il trouve le moyen d'entretenir; à côté de sa mère est une aïeule non moins vénérée, objet de son culte filial et

de son amour. Il lui écrira donc une fois par semaine comme à sa mère et ne craindra pas de multiplier sa peine, sauf à prélever sur ses nuits pour cette double tâche.

On peut prévoir, par tout ce qui précède, que la jeunesse de Cauchy ne dut ressembler en rien à celle de tant de jeunes gens qui dépensent follement dans le plaisir et le désordre tout ce que leur âme et leur cœur renferment d'énergie et de nobles sentiments. Il pouvait aussi bien, et mieux que beaucoup d'autres, se procurer ces plaisirs faciles et énervants que le monde offre à ses adorateurs. Il était jeune, agréable de figure, gracieux de manières, pourvu à un degré supérieur de toutes les qualités de l'esprit; mais ces dons si précieux, et souvent si funestes, ne lui inspirèrent aucun mouvement d'orgueil et ne le firent jamais dévier de la ligne du devoir. La vie de Cauchy a été, par rapport à la vertu, ce qu'elle a été par rapport à la science : d'une teneur égale et toujours la même. En le nourrissant de son lait, comme elle le fit depuis pour ses autres enfants, sa tendre mère l'avait formé, dès ses premières années, au goût d'une piété douce et simple, solide et éclairée comme était la sienne. En effet, tout en elle était aimable et charmant; ignorant seule les dons que la Providence lui avait accordés pour attirer et pour plaire, elle semblait ne vivre que pour le sacrifice et le devoir; toujours occupée des autres, jamais d'elle-même, elle possédait le secret de rendre la vertu plus attrayante que tous les plaisirs, et de faire trouver la piété plus gracieuse que l'amabilité du monde, en laissant se répandre au dehors le charme de cette paix délicieuse qui régnait au fond de son âme. Elle trouva dans le cœur si bien né d'Augustin une disposition toute naturelle à la comprendre et à l'imiter.

La conduite de Cauchy allait du reste montrer que l'absence ne devait rien faire perdre à cette douce et maternelle influence. Ni l'indépendance de cette vie nouvelle où il se sentait, à vingt ans, maître de sa personne et déjà entouré de félicitations et d'hommages, ni l'éloignement de sa famille, au sein de laquelle il avait passé si doucement son enfance et si brillamment sa première jeunesse, ne changèrent rien à sa manière de comprendre et de pratiquer ses devoirs. A son départ, sa prudente mère avait eu soin de lui préparer à la fois un moyen de surveillance et d'appui en le recommandant, comme sait recommander une mère, à un protecteur également distingué par la naissance et la vertu, M. le comte de Latour-Maubourg, que M. Cauchy père avait connu à Paris comme membre du Sénat, et qui se trouvait alors chargé d'une mission à Cherbourg. Sa maison, qui était la première de la ville, fut ouverte à Augustin comme celle d'un ami de famille et lui servit à entretenir des relations qui devaient imprimer à sa jeunesse la plus heureuse direction.

Le séjour de Cauchy à Cherbourg, à l'âge où les passions s'agitent ordinairement dans un cœur avec tant de violence, fut donc exempt de ces orages redoutables; si sa mère eut un moment quelque crainte, ce fut plutôt que son fils ne tempérât pas assez la piété par la prudence. Autant elle regardait la pratique exacte des devoirs et des vertus du chrétien comme devant être la base immuable de la vie, autant elle savait éviter dans ses conseils et ses exemples tout ce qui pouvait altérer, même en apparence, ce caractère noble et digne qui sied si bien à la véritable piété. Mais ces principes étaient précisément ceux d'Augustin Cauchy; aussi montra-t-il tout d'abord une sagesse qu'on ne rencontre pas toujours

même dans l'âge mûr. Les preuves en abondent dans sa correspondance, et il serait trop long de les faire toutes ressortir. Il en est une cependant sur laquelle je vais insister, parce qu'elle me paraît plus particulièrement de nature à mettre en évidence ses belles qualités.

Dès son arrivée à Cherbourg, Cauchy s'était fait connaître comme un chrétien convaincu et logique. Les exemples de ce genre étaient très-rares à cette époque; aussi, grande fut la surprise que causa la vue d'un jeune ingénieur qui passait pour être doué d'un mérite hors ligne et appelé à un brillant avenir, et qui ne craignait pas de pratiquer, dans sa paroisse, l'assistance aux offices comme le plus humble des fidèles. Ce fut presque un scandale. On critiqua le nouvel arrivé, on essaya d'abord de le tourner en ridicule, mais en vain; celui-ci déjouait les plaisanteries et les critiques par la finesse de son esprit ou par la verve de son bon sens, réduisait ses adversaires au silence et les renvoyait souvent remplis d'estime et d'amitié pour sa personne.

Un jour, on imagina de le dénoncer à ses parents, à son excellente mère, et de le représenter comme un jeune homme exagéré et dépourvu de prudence, à qui une dévotion malentendue ferait tourner la tête. Malgré toute la confiance qu'elle avait en lui, sa mère s'émut pourtant de ces rapports, et elle crut devoir lui écrire pour lui faire part des bruits qui couraient et pour provoquer en même temps quelques éclaircissements. Cauchy répondit par une lettre qui rassura complétement sa mère. Je vais rapporter ici la plus grande partie du plaidoyer de l'accusé; rien n'est plus capable de faire ressortir la noblesse de son caractère et la délicatesse de ses sentiments.

« Ma chère maman, écrit-il, à la date de novembre 1810, je vous remercie beaucoup de me faire part de tout ce que

vous entendez dire de moi à Paris, soit en bien soit en mal. Cela me prouve et me prouvera toujours tout l'intérêt que vous prenez de moi. Mais pour vous mettre plus à portée de me donner vos conseils et de juger si les reproches qu'on a pu me faire ou que vous pourriez entendre par la suite sont fondés ou non, je vais vous exposer ma conduite.

» Les maisons que je fréquente à Cherbourg et que je dois naturellement fréquenter sont celles de mes supérieurs; de M. Cachin (directeur des travaux du port et ingénieur en chef), de M. Franqueville, de MM. Duparc et Vallot (autres ingénieurs en chef des Ponts et Chaussées). J'y suis très-bien reçu. Je ne puis me dispenser de voir M. L..., à qui je dois tant de reconnaissance. Dans ces maisons, et en particulier chez M. Franqueville, on rencontre les diverses sociétés de la ville. Parmi ces sociétés, il y en a où la religion est honorée et respectée, et il y en a d'autres où l'on ne songe qu'à s'amuser. Je me suis lié avec quelques-unes des premières, non pas avec toutes, mon temps n'y suffirait pas. Les maisons que je fréquente sont au nombre de quatre ou cinq. Ces maisons sont très-liées entre elles et avec celles de MM. Cachin, Franqueville et Duparc. Je vois ensuite quelques autres personnes qui peuvent m'être utiles par leurs connaissances, leurs conseils, et les bons livres qu'elles me prêtent. Tels sont M. D..., ecclésiastique revenu d'Angleterre, M. C..., principal du collége, et M. V...., qui est très-fort en Mathématiques. Il est vrai que mon camarade G.... n'était pas lié comme moi avec toutes ces personnes; il a pu avoir ses raisons, ne voulant rester qu'une demi-année à Cherbourg; mais on m'aurait blâmé de suivre son exemple, et je profite d'ailleurs des conseils et des lumières de ces différentes personnes. Cela ne m'empêche

pas de travailler pour mon état et en Mathématiques, et dans quelque temps je vous rendrai compte de mes travaux dans ce dernier genre.

» Il peut se faire que quelques maisons où je ne suis point lié, faute de temps ou de convenance, malgré l'offre qu'elles m'en avaient faite très-obligeamment, aient trouvé cela singulier; qu'elles l'aient imputé à mes principes religieux, cela est encore possible; mais pourtant ces personnes me font amitié lorsque je les rencontre, et afin de les ménager je vais leur faire, une ou deux fois l'an, des visites de cérémonie. Du reste, je crois que les personnes avec lesquelles je suis lié sont prêtes à m'avertir de tout ce qui pourrait me faire tort dans l'esprit des autres. Ainsi, Mme M.... m'a donné quelquefois des conseils relativement à la manière de me conduire dans le monde. M. D.... m'en a donné également. Une autre personne qui est fort au courant des nouvelles m'apprend tout ce qu'on dit de moi dans le monde. Vous dites pourtant qu'on me fait des reproches dont on ne m'a pas parlé. Voyons de quelle part viennent ces reproches, quelle en est la gravité et jusqu'à quel point ils sont fondés.

» On dit que la dévotion me fera tourner la tête. Quelles sont les personnes qui disent cela? Ce ne sont pas celles qui ont beaucoup de religion; celles-ci ne m'en ont parlé que pour m'encourager à persister dans ma ligne de conduite, et tout ce qui m'a été rapporté à ce sujet ne me prouve pas qu'elles me blâment. Seulement, il y a quelques jours, une personne de la société de..... me dit amicalement que la religion faisait quelquefois tourner la tête aux jeunes gens. Je causai avec elle à ce sujet et je lui prouvai que je n'avais point la tête tournée. Quant aux personnes qui n'ont point de religion, j'ai résolu de ne leur en parler jamais le premier, je me con-

tente de leur répondre quand elles veulent m'attaquer sur ce point. Ainsi, quand je suis arrivé à Cherbourg, M.... s'avisa un jour de me dire, en parlant des devoirs religieux, que je me corrigerais bientôt de tout cela. Je lui répondis, sans me fâcher, que, lorsqu'on faisait le mal on pouvait bien se corriger, et je lui demandai quel mal il trouvait dans ma conduite. Une personne qui était présente fut de mon avis et prit mon parti. Après avoir vu échouer quelques plaisanteries de ce genre, ce monsieur a fini par me faire beaucoup de politesses et ne me plus parler de religion. On me laisse maintenant fort tranquille à ce sujet, et l'on ne m'en parle plus que pour m'engager à me fortifier de plus en plus dans mes principes religieux. Il peut se faire que quelque philosophe se soit avisé de dire que la religion me ferait tourner la tête et je me félicite sincèrement que, dans un pays où l'on fabrique tant de nouvelles et où quelques personnes s'occupent de médire du matin au soir, on ne m'ait point encore fait d'autres reproches. Et qu'y a-t-il en effet dans la religion qui soit propre à faire tourner la tête? Serait-ce d'assister aux offices divins, de remplir les devoirs du Christianisme, de s'approcher plusieurs fois l'année des sacrements? Je ne le pense pas, et la plus grande obligation que je puisse vous avoir est de m'avoir élevé de bonne heure dans ces saints exercices. Grâces à vous, mes chers parents, qui ne m'avez jamais donné que de bons conseils à suivre, que de bons exemples à imiter! grâces à Dieu qui m'a fait naître de parents si chrétiens et m'a donné tous les moyens de le servir! et si j'ai quelque chose à lui demander, c'est de fortifier en moi le sentiment religieux qu'il y a placé, de détacher de plus en plus mon cœur de l'amour des créatures pour ne l'attacher qu'à lui; de ne permettre jamais que je vienne

à perdre la foi dans laquelle j'ai été élevé; de me pardonner toutes mes fautes; et, après m'avoir comblé de ses grâces sur la terre, de m'admettre avec vous à l'héritage céleste dans la société des saints. Je ne vois rien dans tout cela qui puisse me faire tourner la tête, et je sens au contraire que si je venais à perdre le don sacré de la foi, c'est alors que mon âme, ne sachant plus ce qu'elle doit craindre et ce qu'elle doit espérer, inquiète et incertaine sur l'existence d'une autre vie, se promènerait inutilement sur tous les objets qui l'environnent, sans pouvoir se reposer dans l'avenir, et c'est cette inquiétude de l'âme, cette incertitude dans les pensées qui produit quelquefois le dégoût de la vie et qui a égaré la raison des philosophes au point de les porter à se détruire eux-mêmes. Des exemples malheureusement trop récents, et en particulier la triste fin de M..., à Marseille, serviraient au besoin à prouver ce que j'avance (1). Il est donc ridicule de supposer que la religion puisse faire tourner la tête à personne, et si l'on envoyait tous les fous aux *petites maisons*, on y trouverait plus de philosophes que de chrétiens.

» ..... Mais en voilà bien long sur ce sujet, et il m'est plus profitable de travailler à quelques Mémoires de Mathématiques que de m'étendre sur des considérations de cette nature; mais je tenais à vous prouver que je n'ai pas perdu la tête. Si vous en voulez une autre preuve,

---

(1) M. Cauchy père avait raconté peu de temps auparavant à son fils cette mort sinistre qui plongea toute une honorable famille dans la désolation. « Le fils de M*** vient aussi de périr à Marseille. Il a fini d'une manière malheureuse et qui fait peu d'honneur à la philosophie dont il suivait les principes. Le dégoût de la vie l'a porté, dit-on, à s'en délivrer. »

c'est que je vous aime toujours autant et que je reste conséquent avec moi-même en vous embrassant de tout mon cœur,

» Votre fils :

» A.-L. Cauchy. »

L'accusé avait, comme on le voit, réfuté à fond les reproches qui lui étaient adressés; sa réponse avait même pris la forme d'une discussion presque scientifique. Il va sans dire que ces explications franches, non-seulement portèrent la conviction dans l'âme de sa mère, mais la remplirent de consolation et de joie, en lui montrant dans son fils tant de piété jointe à tant de bon sens et de sagesse. Elle se hâta de lui répondre : « Tu ne pouvais mon cher ami, m'écrire une lettre qui me fût plus agréable. L'exposition de ta conduite et de tes principes nous a remplis de joie et nous rendons grâces à Dieu de tous les bons sentiments qu'il t'inspire. Je me félicite de t'avoir donné l'occasion de m'écrire une si bonne lettre. En la lisant près de ton portrait, je vois ton âme et tes traits. »

Cependant, au bout de trois ans d'absence, la santé de Cauchy se trouva menacée à la suite de travaux incessants et de veilles prolongées qui n'avaient plus pour allégement, comme au sein de la famille, les soins attentifs d'une mère. Mme Cauchy, inquiète de quelques nouvelles douteuses, et s'exagérant ce qu'on essayait de lui dissimuler, n'hésita pas à se rendre auprès de son fils et le trouva en effet dans un état d'affaiblissement et de langueur qui semblaient compromettre, dès le début, cette noble carrière sur laquelle la science avait tant de droits.

Elle se hâta de le ramener à Paris dans la maison paternelle, où il recouvra bientôt ses forces avec le repos. Toutefois, à partir de ce moment, et d'après les conseils de Lagrange et de Laplace, il renonça aux fonctions actives d'ingénieur et se consacra exclusivement à l'étude des Mathématiques et aux progrès de la science pure.

CHAPITRE IV.

PREMIERS TRAVAUX.

> Ce jeune homme est destiné à nous remplacer tous tant que nous sommes de géomètres
>
> *Paroles de* LAGRANGE.

Cauchy compose divers Mémoires. — Sur la théorie des polyèdres. — Sur les fonctions symétriques. — Sur les intégrales définies. — Sur les théorèmes de Fermat. — Il remporte en 1816 le grand prix de Mathématiques. — Il entre à l'Académie des Sciences. — Circonstances dans lesquelles eut lieu sa nomination.

Le premier travail dont Cauchy paraît s'être occupé, concernait la théorie des ponts en pierre et celle des voûtes en général. Après avoir traité avec détail de la construction des voûtes, il posait les principes d'une théorie nouvelle, puis confirmait par l'expérience les résultats de l'analyse. Ce travail fut composé pendant les premiers mois de son séjour à Cherbourg et adressé à M. de Prony pour être soumis au jugement de l'Institut, mais il s'égara dans les papiers de cet académicien. Dans une de ses lettres, Cauchy le réclame avec instance et prie son père de faire des démarches pour le retrouver et le lui renvoyer, ou tout au moins pour lui faire parvenir les principales formules dont il a besoin, afin de continuer la suite de ses recherches, mais ce fut en vain. L'intérêt que Cauchy attachait à ce Mémoire en fera regretter la perte; cependant ce n'était point par des essais de ce genre qu'il devait conquérir sa réputation de savant. Des

travaux relatifs à ses fonctions d'ingénieur pouvaient intéresser les hommes spéciaux et lui assurer un rang distingué dans le corps des Ponts et Chaussées; mais pour fixer l'attention des géomètres et prendre rang parmi les maîtres, il lui fallait traiter des questions d'un ordre plus élevé, et réaliser dans la science pure quelques progrès essentiels et vraiment nouveaux. C'est ce qu'il fit bientôt en abordant plusieurs problèmes qui avaient exercé sans succès la sagacité des géomètres les plus illustres et qui attendaient depuis longtemps une solution.

Il y a toujours eu, aux diverses époques de l'histoire de la science, des questions épineuses, des espèces de *desiderata* qui résistent à tous les efforts et sont là comme une sorte d'énigme ou de défi jeté aux esprits inventifs. Par l'insuccès même des tentatives, elles signalent le point extrême où la science est parvenue et le pas difficile qu'il faut franchir pour en reculer les limites. Parmi les questions qui attiraient alors plus particulièrement l'attention des savants, se trouvait la théorie des polyèdres, c'est-à-dire des solides terminés par des faces planes, assemblées d'une manière quelconque. De nos jours encore, malgré les efforts d'une foule de géomètres, la question est loin d'être épuisée et, tout récemment, l'Académie proposait comme sujet de prix digne de tenter les plus habiles : « de perfectionner en quelque point essentiel la théorie des polyèdres. » L'objet particulier que s'était proposé Cauchy consistait à déterminer les conditions d'égalité et de similitude de ces figures.

Avec trois lignes données, il est facile de voir qu'on ne peut construire qu'un seul triangle dont les angles sont en même temps déterminés; mais il n'en est plus de même pour un polygone dont le nombre des côtés surpasse trois; on peut alors, en changeant les angles, sans

faire varier les côtés, obtenir une infinité de figures différentes. Il ne suffit donc pas de donner les côtés d'un contour polygonal pour que celui-ci soit complétement défini. En passant ensuite aux polyèdres, on peut se demander par analogie si, pour déterminer la figure il suffit de donner toutes les faces sans assigner aucune condition relative aux angles, ou bien, en d'autres termes, si la détermination des faces entraîne celle des angles. Telle est l'opinion d'Euclide dans ses *Éléments de Géométrie*, et tous les géomètres l'avaient admise après lui, mais sans preuves, ce qui constituait une lacune grave. Il est vrai que, dans les *Éléments*, l'absence d'une démonstration générale offrait peu d'inconvénients, car, pour les figures simples qu'on y considère, la proposition pouvait être établie directement dans chaque cas particulier. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les solides qui n'admettent pas plus de trois faces à chaque sommet; mais si le nombre des faces assemblées est supérieur, la démonstration présente des difficultés d'un ordre très-élevé et, à la fin du siècle dernier, la question était encore indécise, malgré les efforts réunis des Euler, des Simpson et des Legendre.

Lagrange avait indiqué cette question à Cauchy comme sujet de recherches, et comme une de celles dont la solution lui ferait le plus d'honneur. Cauchy se mit en effet à l'œuvre sans se laisser décourager par l'insuccès de ses prédécesseurs, et, dès le mois de février 1811, il présenta à l'Académie un premier Mémoire qui fut très-remarqué. La Commission chargée d'examiner le travail, composée de MM. Legendre et Malus, fit un Rapport extrêmement favorable qui concluait ainsi : « Les démonstrations sur lesquelles l'auteur appuie ses théorèmes sont rigoureuses et exposées d'une manière élégante. Vos commissaires

pensent que ces considérations sur les polygones et les polyèdres sont assez curieuses et assez neuves pour intéresser les géomètres, et que le Mémoire de M. Cauchy mérite d'être approuvé par la Classe et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers*. » Legendre, qui s'était spécialement occupé de ces questions et qui du reste ne se laissait pas facilement aller à l'enthousiasme, fut frappé de l'importance de ce premier essai, le regardant « comme le fruit d'un talent exercé et qui devait par la suite obtenir de plus grands succès. » Il engagea donc vivement le jeune savant à continuer ses recherches et à tâcher d'épuiser la question.

C'est ce que fit Cauchy dans un second Mémoire présenté à l'Académie en janvier 1812. Une première partie renfermait huit théorèmes sur les polygones convexes, rectilignes ou sphériques, et servait de préliminaire à la seconde, qui contenait cinq nouvelles propositions relatives aux angles solides et aux polyèdres convexes et qui donnait enfin la solution si vivement désirée des géomètres. La Commission, composée de MM. Biot, Carnot et Legendre, en constatant la découverte, rendit l'hommage le plus complet au mérite de l'auteur; voici les conclusions du Rapport fait par Legendre : « Nous voulions ne donner qu'une idée de la démonstration de M. Cauchy, et nous avons rapporté cette démonstration presque tout entière. Nous avons ainsi fourni une preuve plus évidente de la sagacité avec laquelle ce jeune géomètre est parvenu à vaincre une difficulté qui avait arrêté des maîtres de l'art, et qu'il était important de résoudre pour le perfectionnement de la théorie des solides. » En même temps la découverte de Cauchy prenait rang parmi les ouvrages classiques, et Legendre en faisait passer les principaux résultats dans son *Traité de Géométrie*.

Cet important succès ne fut cependant pas obtenu sans peine. M. Malus, premier juge du travail, crut d'abord la démonstration incomplète et vicieuse. Cauchy lui avait communiqué ses résultats par lettres, et, obligé ainsi de se restreindre à une rédaction abrégée, il s'était borné à mettre en relief les points essentiels de sa découverte. Il s'ensuivit une assez longue discussion dans laquelle Cauchy finit par triompher. « Si M. Malus, écrit-il à son père, n'a point paru satisfait de la démonstration que je vous ai envoyée, cela tient sans doute à ce que vous ne l'avez point averti de ce que j'avais eu pourtant soin de vous dire, que ma démonstration repose sur plusieurs lemmes qu'il est facile de démontrer. Je ne suis pas étonné d'après cela que M. Malus trouve que je suppose des choses qu'on pourrait me nier. Ce n'est pas là la question. Si j'avais eu plus de temps l'autre fois, je vous aurais transmis la démonstration des lemmes que je suppose. Je réduirai aujourd'hui la question à savoir si l'on peut admettre ma démonstration en supposant ces lemmes prouvés. »

Un autre reproche de M. Malus portait sur le mode même de la démonstration, qui est du genre de celles qu'on appelle en géométrie *ab absurdo*, et qui consiste à établir une proposition en faisant voir que les suppositions contraires conduisent à des conséquences absurdes. Cauchy répond encore à ce reproche : « Quant à la forme de démonstration que j'ai employée, je crois qu'il serait non-seulement difficile, mais même impossible de la changer. La raison en est que l'on n'a pas pu jusqu'ici démontrer géométriquement, sans réduction à l'absurde, le théorème qui, dans la Géométrie à deux dimensions, est analogue à celui que je démontre dans la Géométrie à trois dimensions; je veux dire celui par lequel on prouve que deux triangles sont égaux quand ils ont les trois côtés

égaux. Si l'on parvient à démontrer ce dernier théorème sans Trigonométrie et sans réduction à l'absurde, je consens à ce que ma démonstration ne soit point admise. Il paraît donc impossible de bannir de la Géométrie la démonstration *ab absurdo*, qui convient particulièrement au cas dont il s'agit. En effet, pour prouver qu'avec certaines conditions on ne peut construire qu'un seul polyèdre, il faut bien faire voir qu'après en avoir construit un premier avec les conditions données, on ne peut en construire un second sans tomber dans des absurdités. J'insiste sur cette réflexion, parce que l'espèce de démonstration que j'ai employée me paraît inhérente à la nature du théorème en question. Aussi est-ce la seule que M. Legendre ait employée pour la démonstration de quelques cas particuliers du même théorème. »

Vers la même époque, Cauchy s'occupa de la théorie des directrices dans les sections coniques. Ses recherches sur ce sujet, quoique d'un ordre moins élevé, ont cependant une valeur réelle, parce qu'elles ont perfectionné un point important de la Géométrie analytique. Dans cette circonstance encore, il eut assez de peine à se faire rendre justice; on lui contestait le mérite de la priorité, mais sans apporter de preuves. « Il paraît, dit-il dans une de ses lettres, que le sort de mes théorèmes est d'être trouvés, à la première lecture, ou faux ou déjà connus. Mais n'en serait-il pas de la directrice de l'ellipse comme du théorème sur les polyèdres, et, quoique j'aie perdu ma cause en première instance, ne serait-il pas possible, en révisant l'affaire, de trouver que le théorème est nouveau? Toutefois ne croyez pas que j'attache à ce théorème une haute importance, mais comme j'ai feuilleté tous les livres où il est question des courbes du second degré et que je n'y ai rien trouvé, je désirerais au moins que vous

puissiez savoir de M. Poisson dans quel ouvrage on pourrait trouver le théorème dont je parle. Au surplus, j'ai d'autres théorèmes plus intéressants à produire, et j'ai déjà la matière d'un ou de plusieurs Mémoires que je composerai quand je serai à Paris. »

Au mois de novembre de la même année (1812), Cauchy publiait en effet un nouveau Mémoire, de la plus haute portée, sur le calcul des *fonctions symétriques* et sur le nombre des valeurs dont les fonctions sont susceptibles. Il convient de le mentionner d'une manière toute particulière, parce qu'il a donné à Abel la base même de sa démonstration sur l'impossibilité de la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré, et qu'il a provoqué les belles recherches de MM. Bertrand et Serret sur la théorie si délicate des valeurs des fonctions.

L'année suivante, paraissaient trois Mémoires ayant pour objet de développer une méthode propre à la détermination des racines réelles des équations. Cette question difficile était depuis longtemps le but des efforts des plus habiles géomètres, et Lagrange avait récemment publié son célèbre *Traité de la Résolution des équations numériques*. Les nouveaux Mémoires reçurent également l'approbation unanime des savants.

Dans le cours de l'année 1814, Cauchy remportait un nouveau et éclatant succès; il publiait, à la date du mois d'août, son beau travail sur les *intégrales définies* qui éclaircissait un sujet obscur et délicat et constituait une véritable découverte en analyse. Voici les conclusions du Rapport académique qui donnent une idée sommaire de la question, de son importance et de sa difficulté.

« Nous n'examinerons pas, dit le rapporteur, M. Legendre, si les nouvelles méthodes de M. Cauchy sont plus simples que celles qui étaient déjà connues, si leur ap-

plication est plus facile, et si on peut trouver par leur moyen quelque résultat que ne pouvaient donner les méthodes connues; car, quand même on répondrait négativement à ces questions, il n'en resterait pas moins à l'auteur le mérite :

» 1° D'avoir construit, par une marche uniforme, une suite de formules propres à transformer les intégrales définies et à en faciliter la détermination;

» 2° D'avoir remarqué le premier qu'une intégrale double, prise entre des limites données pour chaque variable, n'offre pas toujours le même résultat dans les deux manières d'effectuer les intégrations;

» 3° D'avoir déterminé la cause de cette différence et d'en avoir donné la mesure exacte au moyen des *intégrales singulières* dont l'idée appartient à l'auteur, et qui peuvent être regardées comme une découverte en analyse;

» 4° Enfin d'avoir donné par ses méthodes de nouvelles formules intégrales fort remarquables, qui peuvent bien se déduire des formules connues, mais auxquelles personne n'était encore parvenu.

» Il nous paraît, par tous ces motifs, que M. Cauchy a donné, dans ses recherches sur les intégrales définies, une nouvelle preuve de la sagacité qu'il a montrée dans plusieurs de ses autres productions. »

En 1815, un travail de premier ordre vint achever la réputation du jeune savant, et montrer combien son génie scientifique était fécond et en même temps varié. Ses premiers essais avaient eu pour objet la Géométrie, et d'après le succès qu'il obtint, on pouvait penser que c'était la partie spéciale de la science vers laquelle le portait la tournure propre de son esprit. Les Mémoires suivants signalèrent une aptitude au moins égale pour les recherches ardues et abstraites de l'analyse, et les travaux

dont nous allons parler montrèrent même que là était sa véritable vocation.

Parmi les questions qui exercaient alors la sagacité et la patience des savants, se trouvaient diverses propositions relatives à la théorie des nombres et connues sous le nom de *théorèmes de Fermat*. La théorie des nombres a toujours été l'un des sujets favoris d'étude des géomètres. Les premières découvertes sur cette matière nous viennent des Indiens, qui passent pour avoir été, dans l'antiquité, les inventeurs de l'Algèbre. Les Grecs s'en sont ensuite occupés avec succès; les philosophes de l'école de Pythagore excellaient dans ce genre de recherches, et le fameux théorème du *carré de l'hypoténuse* n'est en définitive qu'un cas particulier de ces *formes quadratiques* dont l'étude exerce encore de nos jours les analystes les plus habiles. On cite surtout, parmi les anciens, Diophante d'Alexandrie, qui vivait du temps de la domination romaine en Égypte. Ce dernier a laissé sur la *théorie des nombres* et sur l'*analyse indéterminée* un ouvrage composé de treize livres, dont six seulement nous sont parvenus; ce qui reste suffit d'ailleurs à la gloire du savant, et c'est là que les modernes sont allés chercher le point de départ de leurs travaux. L'ouvrage de Diophante a été étudié par une foule de commentateurs, au premier rang desquels on distingue le géomètre Fermat.

Pierre de Fermat était originaire de Toulouse et membre du parlement de cette ville. C'était l'un des esprits les plus éminents du XVIIe siècle, si fertile cependant en grands hommes. Jurisconsulte distingué, helléniste érudit, littérateur estimé, géomètre profond, il paraissait réunir tous les genres de mérite. Il a brillé surtout dans la carrière des sciences dont l'étude faisait l'objet de ses

délassements et de ses loisirs. Il partage avec Descartes l'honneur d'avoir appliqué l'Analyse à la Géométrie, et avec Pascal celui d'avoir posé les bases du *Calcul des probabilités;* il fut aussi, avec Descartes, l'un des précurseurs de Leibnitz et de Newton dans la découverte du *Calcul infinitésimal.* Conduit, par ses études sur Diophante, à s'occuper de la théorie des nombres, il avait réalisé, à ce sujet, plusieurs découvertes importantes. On lui reproche seulement de faire trop volontiers un secret de ses démonstrations. C'était alors une coutume assez répandue parmi les savants de publier leurs découvertes sans démonstration ou sous la forme synthétique d'un simple énoncé, afin de rehausser ainsi par le mystère l'intérêt qui s'attachait naturellement à leurs travaux. Telle était en effet la forme sous laquelle Fermat livra au public les résultats de ses recherches. Possédait-il toujours, en réalité, les démonstrations de ses propositions, ou bien étaient-elles uniquement, de sa part, des aperçus de génie, des conséquences obtenues par une certaine intuition et par une généralisation hardie de propriétés plus élémentaires? Il serait difficile de le décider; cependant la dernière supposition paraît la plus vraisemblable, car, si, par la suite, plusieurs des énoncés de Fermat ont été définitivement établis, il est juste d'ajouter que d'autres ont été trouvés en défaut et ont montré que l'auteur s'était trop hasardé.

Quoi qu'il en soit, ces problèmes attiraient vivement l'attention des savants à la fin du siècle dernier. Euler, Gauss, Legendre les avaient sondés avec toute l'activité et la puissance de leur génie mathématique, mais en vain : la solution avait résisté à tous leurs efforts et l'on avait presque renoncé à l'espoir de l'obtenir jamais. Cauchy vint à son tour, et, malgré sa jeunesse, ne craignit pas

de se mesurer avec les maîtres de la science; il devait du premier coup les surpasser.

La proposition qu'il s'agissait surtout d'établir concernait les nombres dits *polygones;* elle avait pour objet de démontrer que tout nombre entier peut être formé par l'addition de trois triangulaires, de quatre carrés, de cinq pentagones, de six hexagones et ainsi de suite. Les recherches de Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticæ* et celles de Legendre dans sa *Théorie des nombres* avaient seulement démontré les deux premières parties du théorème, c'est-à-dire que tout nombre entier est la somme de trois triangulaires et de quatre carrés. Cauchy fit voir que la proposition est générale et demeure vraie dans tous les cas; il donna en même temps une foule de résultats intéressants et nouveaux qui découlaient incidemment de ses recherches.

Ce travail produisit une vive sensation, non-seulement à cause de la difficulté même du sujet, mais surtout en raison de la nouveauté et du mérite de la méthode suivie. Cauchy avait rencontré en cette circonstance une de ces inspirations heureuses pour lesquelles il faut à la fois le coup d'œil sûr du génie et l'ardeur entreprenante de la jeunesse; aussi sa découverte le fit placer d'un accord unanime au rang des plus habiles géomètres.

Une autre production, non moins importante, vint, l'année suivante (1816), clore brillamment cette première période de sa carrière scientifique. L'Académie des Sciences avait proposé au concours pour le grand prix des Mathématiques la question suivante : « Établir la théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. » Cauchy, au milieu de tous ses autres travaux, trouva encore le moyen de traiter la question proposée et remporta le prix par un

Mémoire remarquable qui a été inséré dans les recueils de l'Académie. Il avait pris pour épigraphe ce vers de Virgile :

Nosse quot Ionii veniant ad littora fluctus (1).

Heureuse réminiscence de ses études littéraires, qui résumait le but et la solution du problème d'une manière aussi exacte qu'élégante et ingénieuse.

Des succès aussi brillants et aussi précoces avaient signalé Cauchy à l'attention de tout le monde savant; à peine parvenu à l'âge de vingt-sept ans, il jouissait déjà d'une réputation que les plus habiles n'acquièrent ordinairement qu'à la longue; sa jeunesse ne faisait que la rendre plus éclatante. Les heureux présages que Lagrange avaient exprimés quelques années auparavant commençaient à se réaliser, et les géomètres avec lesquels M. Cauchy père se trouvait en rapport, lui adressaient pour son fils les plus vives félicitations. Dès l'année 1812, M. Cauchy pouvait lui écrire en leur nom : « Tu as frappé fort à la porte de l'Académie par ton dernier Mémoire sur les polyèdres. Un de ces théorèmes démontré (les théorèmes de Fermat) te l'ouvrirait toute grande. Le moment est favorable, ne le laisse pas échapper. » Legendre lui-même, le grave et sévère Legendre, avait été tellement satisfait de ses travaux en Géométrie pure, qu'il ne put s'empêcher de dire à l'auteur : « Maintenant, monsieur, vous pouvez entrer à l'Académie. » Ces paroles, dans la bouche d'un homme habituellement si froid et si réservé, prenaient une valeur toute particulière.

---

(1) *Géorgiques*, livre II, v. 108.

Les portes de l'Académie devaient en effet s'ouvrir bientôt devant Cauchy et jamais cet honneur n'avait été mieux mérité. Dès l'année 1813, il s'en fallut de peu que le jugement de Legendre ne reçût sa sanction. L'illustre géomètre de Turin, Lagrange, venait de mourir et laissait un héritage difficile à recueillir. La section de Géométrie, composée alors de Laplace, Biot, Legendre, Lacroix et Bossut, appelée à présenter dans la séance du 24 mai 1813 une liste de candidats, l'arrêta dans l'ordre suivant : MM. Binet jeune, Cauchy, du Villas, Poinsot, Puissant, Ampère, Parseval-Deschênes. Dans la séance suivante, M. Poinsot réunit la majorité des suffrages et fut élu académicien. On voit que, malgré son jeune âge, Cauchy avait obtenu le second rang sur la liste, et s'il ne fut pas nommé c'est que, au scrutin, des considérations d'un autre ordre furent mises en balance avec le mérite. Les avenues de l'Institut étaient occupées par des hommes plus âgés, qui ayant d'ailleurs rendu à la science d'utiles services devaient être récompensés les premiers. L'année suivante, la mort de M. Lévêque laissait une autre place vacante. Cauchy fut de nouveau présenté, mais vit encore son élection ajournée par les mêmes motifs. Quant à ses droits et à la supériorité de ses titres, personne ne les mettait en doute, et ils étaient reconnus par ceux-là même qui appuyaient d'autres candidats. Deux lettres, retrouvées dans les papiers de famille, en sont une preuve irrécusable. La première est de Cuvier à l'adresse du chancelier Dambray :

« Monseigneur, le jeune M. Cauchy, pour lequel Votre Excellence a bien voulu m'écrire, est en effet l'un de nos géomètres les plus distingués. Son talent est attesté par les grands maîtres de la science et il n'est pas douteux que la Classe ne fasse en lui une excellente acquisition.

L'intérêt que Votre Excellence y prend, ajoute infiniment au désir que j'avais de le voir bientôt parmi nous, désir que partagent au reste unanimement mes confrères, ceux mêmes qui, dans le concours actuel, pourraient vouloir faire passer avant lui quelqu'un de ses rivaux.

J'ai l'honneur, etc.

G. CUVIER. »

Le chancelier Dambray, en envoyant cette lettre à M. Cauchy père, ajoutait : « Je m'empresse, monsieur, de vous envoyer la lettre que je viens de recevoir de M. Cuvier, en vous félicitant des espérances de succès qu'elle vous donne pour la nomination de votre fils, dont les titres sont reconnus même parmi ses concurrents. La justice qu'on lui rend est la plus douce des jouissances pour un père comme vous.

Recevez, etc.

DAMBRAY. »

Voici enfin une lettre de Laplace qui emprunte au nom de ce savant une autorité exceptionnelle. Elle était adressée à M. le comte de Sémonville, grand référendaire :

« M. Cauchy vient de m'apprendre la mort de M. Lévêque, mon collègue à l'Institut et examinateur des élèves de la marine. Il désirerait que son fils remplaçât cet examinateur. Je puis vous assurer que personne n'est plus en état que ce jeune homme de remplir cette place importante. M. Cauchy fils est un géomètre très-distingué qui a fait preuve à l'Institut d'un rare talent pour les Mathématiques par un grand nombre d'excellents Mémoires qu'il a donnés sur les diverses branches de ces sciences. *Il est, parmi tous ceux qui prétendent à la place*

actuellement vacante dans l'Institut, celui qui me paraît avoir le plus de droits, et je le crois destiné à remplacer dignement les géomètres de cet illustre corps. Je me fais un vrai plaisir de lui rendre ce témoignage.

Je vous renouvelle, etc.

Comte LAPLACE. »

Les témoignages qui précèdent établissent d'une manière incontestable la supériorité des titres de Cauchy; il nous a paru d'ailleurs utile de les rappeler parce qu'ils permettent de juger avec plus d'impartialité les circonstances dans lesquelles eut lieu son entrée à l'Académie.

Malgré son caractère essentiellement scientifique, l'Institut fut compris parmi les grands établissements publics qui eurent à subir le contre-coup de la chute de l'Empire. Une ordonnance du 21 mars 1816 le soumit à une réorganisation; la division en Classes fut supprimée et on rétablit les anciennes Académies avec leurs dénominations spéciales. En même temps on promulgua des listes sur lesquelles plusieurs noms d'anciens membres furent remplacés d'office par des noms nouveaux; ceux de Carnot et de Monge, en particulier, disparurent de la section de Mécanique, et l'on fit choix de Cauchy et de Bréguet pour occuper la place de ces deux savants géomètres. Mon dessein n'est point de pénétrer dans le domaine de la politique, ni de discuter les nécessités auxquelles peut être soumis un pouvoir naissant; toutefois, afin de rester fidèle à la vérité, il faut reconnaître que cette dernière mesure souleva de violentes récriminations et fut sévèrement jugée par l'opinion publique. La disgrâce de Monge surtout provoqua une vive explosion de

sympathies et de regrets. « L'exclusion de Monge, dit M. Biot (1), fut une inhumanité politique et un deuil pour l'Académie. Monge n'avait pas siégé dans les assemblées révolutionnaires; il n'était ni *votant*, ni *conventionnel*. Faible et sans défense, il avait, comme tant d'autres, courbé la tête sous le vent de la Terreur qui, par malheur pour lui, le porta au Ministère de la Marine à l'époque de la mort du Roi..... Mais pouvions-nous oublier tant de services rendus par lui aux sciences, nous surtout devenus ses collègues, qui avions été à l'École Polytechnique ses disciples chéris; qu'il avait hautement défendus, réclamés, sauvés de la proscription à l'époque de vendémiaire! »

Ces circonstances créaient à Cauchy une situation difficile; aussi ne faut-il pas s'étonner s'il fut l'objet de critiques ardentes et passionnées. Nous laisserons encore à M. Biot le soin de le justifier. « Cauchy, ajoute ce vénérable académicien, n'était pas de ce temps; il n'avait pas les mêmes liens. D'ailleurs ses sentiments personnels ne lui faisaient concevoir aucun doute sur la légalité de sa nomination. Il accepta sans hésiter, non par intérêt, jamais il ne fut sensible à un motif pareil, mais par conviction. L'opinion des savants fut indulgente pour Bréguet, sévère pour lui, sévère surtout de la part de ceux qui, en toute circonstance, ont su accommoder leurs convictions politiques à leurs intérêts. »

Il serait superflu de rien ajouter à une appréciation dont l'autorité est si grande. Après les preuves éclatantes que Cauchy avait données d'un talent supérieur, son en-

---

(1) Lettre à M. de Falloux, insérée dans le *Correspondant*, année 1857.

trée à l'Académie était assurée, et son élection prochaine, par ses pairs, ne pouvait présenter aucun doute, si la mesure politique dont il fut l'objet (1) ne l'avait empêché de recueillir spontanément la plus noble récompense de ses travaux.

---

(1) Ce n'est pas seulement à une époque de réaction royaliste que se sont produits des faits regrettables tels que ceux que nous signalions tout à l'heure. Le 25 août 1792, en pleine séance de l'Académie des Sciences, Fourcroy annonçait « que la Société de Médecine avait rayé plusieurs de » ses Membres émigrés et notoirement connus pour contre-révolution- » naires, et proposait à l'Académie d'en user pareillement envers cer- » tains de ses Membres connus par leur incivisme. Plusieurs personnes » répondirent que l'Académie n'avait le droit d'exclure aucun de ses » Membres et ne devait pas prendre connaissance de leurs principes et de » leurs opinions politiques, le progrès des sciences étant son unique oc- » cupation. » Cependant, porte le procès-verbal, *les différents avis* furent *longuement discutés*, et (le croirait-on aujourd'hui?) les opposants eux-mêmes observaient que « d'ailleurs l'Assemblée nationale se trouvant à » la veille de donner une nouvelle organisation à l'Académie, elle exer- » cerait le droit qu'elle seule pouvait avoir de rayer de la liste de l'Aca- » démie les Membres qu'elle jugerait devoir en être exclus. »

(*Voir* le Mémoire lu par M. Bertrand à la dernière séance publique annuelle des cinq Académies de l'Institut et intitulé : *L'Académie des Sciences de* 1789 *à* 1793. p. 63 et 64).

CHAPITRE V.

LE PROFESSORAT ET LES ÉVÉNEMENTS DE 1830.

Il quitta sa patrie pour garder sa foi.
Lettre de M. Biot.

Cauchy est appelé au professorat. — Son mérite et ses succès dans l'enseignement. — Ouvrages classiques. — Mariage de Cauchy. — Événements de 1830. — Convictions politiques de Cauchy. — Il refuse le serment. — Il quitte la France. — Son séjour en Suisse. — Il est appelé à Turin. — On lui propose de faire l'éducation du duc de Bordeaux. — Il se rend à Prague.

Cauchy fut appelé de bonne heure à occuper, soit comme titulaire, soit encore comme suppléant de M. Biot, les chaires les plus élevées de l'enseignement des sciences, à l'École Polytechnique, à la Sorbonne, au Collége de France. C'est un des aspects de sa vie qui mérite le plus de fixer notre attention.

Si la première qualité d'un maître est de connaître à fond les sciences qu'il doit enseigner et de prouver par des travaux originaux qu'il en a sondé tous les principes et qu'il en domine toutes les hauteurs, on peut bien dire que les titres de Cauchy étaient établis d'une manière exceptionnelle. Mais, pour être bon professeur, il ne suffit pas toujours d'avoir montré une aptitude plus ou moins grande pour les travaux scientifiques, ni même de s'être signalé par des découvertes d'un ordre élevé. Tel savant réussira dans les travaux d'investigation, contri-

buera avec honneur aux progrès de la science, et cependant pourra échouer dans l'enseignement. On en citerait de nombreux exemples.

Une méthode simple et rigoureuse, une exposition ferme et logique, un langage clair et précis, voilà ce qui est, avant tout, nécessaire à un professeur pour enseigner avec fruit et pour faire pénétrer sûrement la vérité dans les esprits de ses disciples. Il est rare, surtout dans les régions supérieures de la science, de trouver un auditoire suffisamment préparé; il ne faudra donc pas craindre de l'initier aux premiers éléments des théories qu'il s'agit d'approfondir; le plus souvent, lorsqu'un problème est bien posé, la difficulté est en grande partie vaincue, et la solution à moitié trouvée. Dans le développement d'une théorie longue et abstraite, l'esprit de l'auditeur est sujet à se fatiguer et à se perdre dans la multiplicité des raisonnements et des formules, si le maître ne s'efforce pas de tenir son attention éveillée par des efforts soutenus. De là, une autre qualité essentielle du professeur : le mouvement dans l'exposition et l'animation dans la parole. Il ne faut pas croire que les sujets littéraires ou philosophiques soient les seuls qui se prêtent à l'art de bien dire; il y a tel endroit d'un problème, tel passage d'une théorie, où la difficulté graduée avec mesure et le dénoûment préparé avec habileté offrent autant d'intérêt pour l'esprit qu'un beau mouvement dans un discours oratoire ou qu'une situation dramatique dans une œuvre littéraire.

Il faut enfin, et par-dessus tout, que le maître possède ce don précieux qu'on appelle quelquefois le feu sacré. Il faut qu'il porte à la science un culte sincère, il faut qu'il se passionne pour ses disciples, qu'il n'épargne, à leur sujet, ni le travail ni la peine, et qu'il ait vraiment

pour eux un cœur de père, s'intéressant à leurs progrès et s'identifiant à leurs triomphes. C'est là ce qui fait naître entre le professeur et les disciples l'attachement et la confiance mutuelle, source des grands succès.

Tel s'est toujours montré Cauchy pendant la durée de son professorat. Son amour pour la science, l'élévation et la perfection de son enseignement, l'élégance de sa diction, due à de fortes études classiques, et enfin son affection et son dévouement sans bornes pour ses élèves, en firent un des maîtres les plus habiles et les plus aimés dont les hautes chaires de Paris conservent le souvenir. Sans doute il n'était pas toujours facile de le suivre dans les sphères élevées où se plaisait son génie, et souvent la nouveauté des aperçus et l'originalité des méthodes mettaient à d'assez rudes épreuves l'attention et la sagacité de ses auditeurs. Mais ce défaut tenait à la nature même de cet essor qui l'emportait sans cesse vers les sommités de la science et lui rendait si simple l'intuition des théories les plus délicates. Du reste, la leçon terminée, il redescendait volontiers sur la terre, et se mettait à la disposition de chacun avec un entier abandon, levant les difficultés, complétant les détails, éclaircissant les points incompris et ne se lassant pas jusqu'à ce qu'il eût atteint le résultat désiré. Nous aimons à citer ici un témoignage solennel et touchant, également honorable pour le professeur et pour son illustre et reconnaissant élève. M. Combes, Membre de l'Institut, s'exprimait ainsi dans un discours prononcé aux obsèques d'Augustin Cauchy : « Il y a près de quarante ans que je recevais à l'École Polytechnique les leçons du géomètre déjà illustre par de belles découvertes auxquelles s'ajoutaient chaque jour les résultats de ses travaux incessants; et pourtant ce professeur était pour nous tous d'une complaisance infa-

tigable. Je l'ai souvent entendu répéter, pendant plusieurs heures, des leçons entières qui n'avaient pas été bien comprises; nous étions alors frappés de l'élégante facilité d'une analyse qui nous avait d'abord paru, à défaut d'attention, aride et rebutante. C'est que M. Cauchy alliait au génie des Euler, des Lagrange, des Laplace, des Gauss, des Jacobi, l'amour de l'enseignement porté jusqu'à l'enthousiasme, une rare bonté, une simplicité, une chaleur de cœur, qu'il a conservées jusqu'à la fin de sa vie. »

Parmi les témoignages qui honorent le plus la mémoire de Cauchy, citons encore la dédicace du savant ouvrage de M. Hermite *sur les équations modulaires*. En tête de ce travail où l'auteur a réalisé un progrès capital dans l'analyse en donnant une méthode pour résoudre les équations du cinquième degré, question difficile qui avait arrêté jusqu'alors tous les géomètres, on trouve inscrit le pieux souvenir que voici :

Venerandæ memoriæ
Eximii viri Augustini Cauchy.
. . . . . .
Hoc qualecumque munus
Libenter accipias,
Et, ex beata æternæ felicitatis sede,
Animum sanctæ amicitiæ pie memorem
Benigne aspicere digneris.

Ces quelques lignes si simples, si modestes et en même temps si touchantes, montrent combien étaient vifs les sentiments d'affection et de reconnaissance qu'un tel maître savait inspirer à de tels disciples.

Le passage de Cauchy dans le professorat a été marqué par la production de plusieurs ouvrages classiques d'une grande importance. Fidèle à l'habitude qu'il avait con-

tractée dès sa sortie de l'Ecole Polytechnique, il ne quittait pas un sujet avant de l'avoir complétement approfondi et élucidé, de manière à satisfaire les exigences des esprits les plus difficiles. A cette époque, les méthodes d'enseignement étaient loin d'avoir le degré de perfection où elles sont parvenues aujourd'hui, et les éléments mêmes de l'analyse étaient l'objet de discussions contradictoires entre les savants les plus habiles. Lagrange, Carnot, Poisson et bien d'autres, avaient exercé leur talent sur ces difficultés, mais sans les résoudre d'une manière satisfaisante. On peut en juger par les tentatives infructueuses de Lagrange, le plus illustre d'entre eux. On sait que ce dernier avait entrepris de refaire l'analyse en la débarrassant de toutes les considérations d'infini et de limites, pour la ramener à la forme ordinaire des calculs algébriques. C'est en effet sur cette idée première que reposent plusieurs de ses ouvrages. Mais le progrès était plus apparent que réel; de l'avis de tous les hommes compétents, les méthodes de Lagrange manquent de rigueur; aussi, ont-elles été bientôt abandonnées, et celles dont on fait usage aujourd'hui sont, en grande partie, l'œuvre de Cauchy. Parmi les divers traités dans lesquels il a développé ses idées, on doit citer surtout le *Traité de Calcul différentiel et intégral*, le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, les *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la géométrie*. De nos jours, ces ouvrages ont fait place à d'autres, mieux accommodés aux progrès actuels de la science, mais c'est en définitive dans les livres de Cauchy que les auteurs contemporains ont puisé les méthodes plus parfaites qui sont maintenant universellement adoptées.

Ces traités ont rendu d'ailleurs à la science des services de plus d'un genre. Cauchy ne se bornait pas au

rôle de professeur et d'écrivain; il ne se contentait pas d'interpréter ou de perfectionner les travaux de ses prédécesseurs; on retrouvait à chaque instant chez lui l'homme de recherches et l'inventeur de génie. Même dans les questions les mieux connues, il lui arrivait souvent de découvrir des méthodes nouvelles, et d'ouvrir aux savants des horizons inexplorés. Son esprit inventif se manifeste surtout dans le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* qu'il publia, en 1821, sur l'invitation de Laplace et de Poisson. C'est en effet dans ce dernier ouvrage qu'il émit pour la première fois ses belles considérations sur la *continuité des fonctions* qui ont été admises, depuis, par tous les géomètres, et qui font maintenant la base de toutes les méthodes adoptées pour l'exposition du Calcul infinitésimal. « J'ai cherché, dit-il dans la préface, à donner aux méthodes toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude. »

On ne sera pas étonné, d'après ce qui précède, des éclatants succès que Cauchy obtint dans son enseignement. Son auditoire ne se composait pas seulement des élèves studieux que le désir de s'instruire réunit toujours autour de la chaire d'un maître habile; les savants eux-mêmes venaient avec empressement recueillir ses leçons et ne dédaignaient pas pour cela de reprendre le rôle modeste de disciple. A côté de simples étudiants, on y voyait les hommes les plus illustres dans les sciences mathématiques, tels que MM. Ampère, Sturm, Coriolis, Lamé et la plupart des géomètres de ce temps. Il lui venait même des auditeurs de l'étranger, et ce devait être, pour le professeur, l'occasion d'un sentiment d'orgueil bien légitime d'avoir à porter la parole devant des hommes tels que MM. Lejeune-Dirichlet, de Berlin, Vallejo, de Madrid, Ostrogradsky et Bouniakousky, de l'Académie de Saint-Pétersbourg, devant des savants qui s'étaient déjà illustrés par des travaux personnels de premier ordre et que la réputation de Cauchy avait réunis de si loin autour de sa chaire. De tels faits témoignent avec éclat de la haute estime dans laquelle on tenait le professeur et son enseignement.

Reprenons maintenant le cours de notre récit, un moment interrompu par l'exposé des travaux scientifiques du géomètre.

Cauchy avait épousé, en 1818, Mlle Aloïse de Bure, qui devait être, pendant près de quarante ans, la compagne tendre et dévouée de sa vie. Un même esprit ne cessa jamais d'animer les deux époux; inspirés par les mêmes sentiments de foi chrétienne et de zèle charitable, ils unissaient leurs efforts pour le bien et les bonnes œuvres. Cette union ne se démentira point dans les temps difficiles; on verra bientôt Mme Cauchy associée aux épreuves

de son mari, ne pas reculer pour le suivre devant les rigueurs d'un exil volontaire. Plus tard, après la mort de Cauchy, elle n'aura plus qu'un souci, ce sera de cultiver les amitiés illustres demeurées fidèles à la mémoire du grand géomètre, et de continuer les bonnes œuvres entreprises d'abord en commun.

Dans la nouvelle famille où il venait d'entrer, Cauchy avait retrouvé, avec le culte de toutes les vertus domestiques, quelque chose de ces goûts et de ces traditions littéraires qui avaient influé si heureusement sur la direction de sa jeunesse. Le vieil hôtel de la rue Serpente qu'occupait la famille de Bure, et qui a récemment disparu pour faire place au nouveau boulevard Saint-Michel, avait vu, à la fin du XVIIIe siècle, son salon fréquenté par les hommes de lettres et les savants dont M. Guillaume de Bure avait édité les œuvres. On y vivait dans les meilleures relations de voisinage avec la famille Sylvestre de Sacy, qui habitait l'hôtel contigu de la rue Hautefeuille, resté debout comme un témoin vénérable du vieux quartier latin, maintenant en grande partie abattu. On y admirait des collections célèbres, acquises depuis par le cabinet des estampes ou devenues l'un des ornements les plus recherchés des grandes bibliothèques. Ces collections étaient l'œuvre des deux frères de Bure, dont l'inaltérable union, autre reste des temps passés, se complétait encore d'une manière touchante par l'amitié non moins fraternelle du savant et excellent M. Van Praët. Ce dernier était Membre de l'Académie des Inscriptions et a laissé un nom aussi honoré au palais de l'Institut qu'à la bibliothèque de la rue de Richelieu, dont il semblait résumer l'inventaire tout entier dans sa vaste et imperturbable mémoire. Près de ce vieillard érudit et aimable, un jeune savant, neveu de Mme de Bure, et devenu

aussi plus tard Membre de la même Académie, M. Charles Magnin, dont M. Sainte-Beuve a tracé récemment un portrait écrit de sa plume la plus délicate (1), se faisait remarquer dans le salon de la rue Serpente par la finesse de son esprit, la pureté de son goût, l'urbanité de ses manières.

On n'avait pas encore, à cette époque, banni des fêtes de famille cette antique gaieté de nos mœurs françaises, qui aimait à mêler à la conversation quelques rimes et à rompre par de joyeux couplets le cérémonial compassé d'un jour de noces. M. Pierre Didot l'aîné, autre cousin de la famille de Bure, avait, à l'occasion du mariage d'Augustin Cauchy, fait imprimer sous ses nobles presses un petit recueil de poésies composées en l'honneur de la jeune épouse. On y lit la strophe suivante de M. Charles Magnin, qui s'est conservée longtemps dans les souvenirs des deux familles :

Voulez-vous que du mariage
Je vous soumette le budget?
Vingt ans d'amour, pas davantage,
D'amitié trente, accordé net.
D'enfants en tout point votre image
Je vote un couple aimable et beau;
Et pour les soucis du ménage,
Tout bien compté, je mets zéro.

Les souhaits du spirituel académicien ne devaient se réaliser qu'en partie; le ménage aura en effet à subir de longues et difficiles épreuves, mais deux aimables filles viendront combler de joie leurs parents, et continueront

(1) *Voir* la *Revue des Deux Mondes*, n° du 15 mai 1863, article intitulé : *Un érudit écrivain*.

un jour dans la famille ses traditions d'honneur et de vertu (1).

Les premières années du mariage de Cauchy ne furent troublées par aucun chagrin. Tout semblait lui sourire. Ses travaux scientifiques, accueillis avec admiration par tous les géomètres, lui avaient valu successivement les positions les plus recherchées dans le monde savant. D'un autre côté, les qualités de son cœur le rendaient cher à tout le monde, et la noblesse de son caractère lui méritait une estime universelle. Sa vie privée n'était pas moins bien partagée; il trouvait au sein de sa famille et dans l'intimité du foyer domestique tout ce qui fait le charme de l'existence. Près de lui, il voyait ses vénérables parents qui avaient autrefois veillé avec tant de sollicitude sur ses jeunes années, et qui, parvenus à un âge avancé, recueillaient dans les triomphes du fils la plus douce des récompenses de leurs soins; il y rencontrait encore ses frères, avec lesquels il avait grandi et qui lui restèrent invariablement unis par la conformité des sentiments et des goûts et par les liens d'une tendre amitié. Son bonheur était donc sans mélange et l'avenir se présentait à lui sous l'aspect le plus favorable. Il semblait qu'il ne lui restât désormais qu'à poursuivre, au milieu des jouissances les plus pures, le cours de ses grands travaux. Mais la Providence avait d'autres vues. Ce bonheur devait être bientôt traversé par des événements imprévus; la révolution de 1830 éclatait brusquement et venait briser en un instant toute la carrière du savant.

On ne saurait assez déplorer cette fatale influence de

(1) Mme la vicomtesse Félix de l'Escalopier et Mme la comtesse Alfred de Saint-Pol.

nos discordes civiles, dont le contre-coup s'étend souvent jusqu'aux hommes les plus étrangers aux affaires de l'État. Si quelqu'un doit être à l'abri des commotions politiques, c'est bien le savant qui, loin du tumulte de la place publique, se livre à l'étude dans la retraite et le silence du cabinet; et cependant des exemples nombreux montrent qu'il n'est pas d'asile inviolable, même dans les régions élevées de l'intelligence. Quinze ans auparavant, Monge et Carnot étaient atteints, aujourd'hui Cauchy allait être frappé à son tour.

Cauchy s'est toujours montré profondément attaché de cœur à la dynastie des Bourbons. Jamais cependant aucune fonction politique, aucune faveur de cour n'étaient venues le chercher dans sa retraite. Sa haute position scientifique était due tout entière à son mérite, et l'on ne saurait regarder comme une faveur personnelle sa nomination par ordonnance à l'Académie. Conseillée par la politique, cette mesure n'avait pu que lui créer une position difficile et compromettre ses titres les mieux établis. Les motifs de l'attachement de Cauchy étaient puisés à une source plus haute et plus désintéressée. A ses yeux, le gouvernement des Bourbons était le seul légitime et, par suite, le seul qui pût offrir à la France des gages certains d'ordre et de sécurité après les orages révolutionnaires. Hors de cette ligne directe de la descendance de nos anciens rois, qui était pour lui comme la ligne droite en Géométrie, il lui semblait que tout serait remis au hasard et que le pays allait retomber dans le désordre et l'anarchie. Hors de ce principe conservateur, il n'apercevait que de vagues systèmes et d'effrayantes utopies, qui devaient se traduire plus tard en bouleversements sociaux et en révolutions nouvelles. Il aimait aussi à reconnaître dans les princes de la maison

de Bourbon les soutiens de la religion et de la civilisation chrétienne, les défenseurs des idées et des principes auxquels il avait voué de bonne heure son âme et son cœur. Aussi se sentait-il blessé à la fois dans ses affections les plus chères et ses convictions les plus profondes.

Mais il y avait encore pour Cauchy une autre raison, un motif impérieux de conscience, qui devait désormais dominer toute sa conduite et décider du reste de sa carrière. En prenant possession de ses chaires il avait prêté serment de fidélité à son roi, et il ne pensait pas que le canon d'une émeute triomphante fût suffisant pour dégager sa parole. Cet attachement inébranlable à ses princes, cette fidélité inviolable à la religion du serment occupent une place tellement importante dans la vie de Cauchy, qu'il convient de s'y arrêter un instant et de faire connaître les idées du savant à ce sujet. On les trouvera peut-être sévères et exagérées, mais on ne pourra se dispenser de rendre un juste tribut d'éloges et d'admiration à la noblesse de son dévouement; il sera beau de voir un homme qui, au milieu de l'affaissement général des caractères, sait demeurer fidèle au culte des grandes choses et qui, pour obéir aux délicatesses de sa conscience, n'hésite pas à sacrifier sans retour tout ce qu'il a de plus précieux.

Il n'y a rien parmi les hommes, de plus auguste ni de plus sacré que le serment. Lorsqu'un homme engage sa parole à l'un de ses semblables, il lui donne ce qu'il a de plus personnel et de plus intime. Douter de la parole d'un homme, n'est-ce pas lui faire une cruelle injure? Que sera-ce donc si la parole est accompagnée du serment et repose sur tout ce qu'il y a de respectable et de sacré dans le monde? Ne prend-elle pas alors un caractère plus solennel? Ne semble-t-il pas que la Divinité elle

même, prise à témoin, soit intéressée à son exécution ou mise en demeure de punir le coupable d'une manière éclatante? Dans les annales de la civilisation chrétienne, il n'y a rien de plus constant ni de plus glorieux que cette fidélité inviolable à la religion des serments, de ceux surtout par lesquels on s'engageait envers son prince et sa patrie.

De nos jours, sans doute, la dignité des serments n'a rien perdu de sa force chez les âmes bien nées, et cependant il est une des formes de la parole jurée dont la valeur, par suite du malheur des temps, s'est singulièrement amoindrie parmi les nations contemporaines : c'est le serment politique. La France, en particulier, a été le théâtre de révolutions nombreuses, une foule de gouvernements se sont succédé les uns aux autres, et chaque pouvoir nouveau a voulu jouir du bénéfice de ce lien spécial de fidélité que la parole engagée ajoute au devoir général de tout bon citoyen. Chacun d'eux a donc continué d'exiger le serment à son profit. Il fallait s'y attendre, car on comprendrait difficilement comment un gouvernement, soucieux de sa sécurité, pourrait employer à son service des hommes manifestement hostiles et déterminés d'avance à lui nuire.

Mais, tout en déplorant la perturbation qui s'est introduite à cet égard dans nos mœurs publiques, il est juste, cependant, d'établir une distinction importante. Le serment d'un homme politique appelé, par la nature même de sa position, à prendre une part active à la direction des affaires de l'État, impose des devoirs d'une spécialité plus rigoureuse; mais la portée du serment serait-elle aussi étendue pour une foule de personnes qui, tout rattachées qu'elles sont à l'administration par un titre quelconque, n'ont cependant rien à démêler avec les

affaires politiques du pays? Mais surtout, le serment obligera-t-il au même degré le ministre confident de la pensée de son souverain, et l'homme d'étude dont la charge se borne à enseigner les sciences exactes ou bien à travailler à leurs progrès? Assurément non. « Les plus scrupuleux, a dit, au sujet de Cauchy, un homme dont l'honorabilité est connue de tous (1), pouvaient se dire que la fidélité d'un simple savant consistant à continuer de suivre ses études sans se mêler en rien à la politique, le serment qu'on lui demande ne l'engage au fond qu'à ce qu'il a dessein de faire; que, dans son application la plus stricte, il lui interdit seulement toute action positive contre le gouvernement qui l'impose, sans l'obliger à un concours actif ni à cesser d'aimer ce qu'il aimait; à quoi il peut complétement satisfaire en s'isolant dans le monde intellectuel, où la nature bien comprise de sa vocation et de sa carrière doit spontanément le retenir. » Il ne nous appartient pas de condamner ces interprétations adoucies, admises d'un accord tacite entre les gouvernements et les hommes dont ils acceptent les services; il sera cependant permis de regretter que de telles concessions aient été rendues nécessaires, et de réserver un tribut spécial d'estime et d'admiration pour les hommes généreux dont la conscience s'effraye à la vue de ces transactions et qui préfèrent tout sacrifier à ce qu'ils pensent être le devoir.

Telle fut la ligne de conduite de Cauchy. Dès le premier moment il refusa absolument de prêter serment au nouveau pouvoir, et la conséquence immédiate de sa dé-

(1) Lettre de M. Biot à M. de Falloux; *voir* le *Correspondant*, année 1857.

termination fut la perte de toutes les positions qu'il occupait et qu'il avait si laborieusement conquises. Il se trouvait ainsi, à l'âge de quarante ans, et après vingt années d'éminents services rendus à la science, brusquement dépouillé de tous les fruits de ses travaux. C'est alors qu'il prit l'énergique résolution de se condamner volontairement à l'exil. Une détermination aussi extrême semblera peut-être bien étrange; on dira, qu'après tout, il était libre de demeurer en France et d'y continuer, dans la retraite, le cours de ses travaux. Pour répondre à cette objection et apprécier convenablement la conduite de Cauchy, il faut se reporter à d'autres temps et rappeler des exemples célèbres.

Telle avait été, en particulier, la conduite de Descartes dans des circonstances analogues. Lui aussi vivait dans un temps où la France, violemment tourmentée par des troubles civils et religieux, n'offrait pas aux hommes d'étude un asile suffisamment calme et assuré; lui aussi quitta sa patrie, et crut devoir chercher au loin un pays plus hospitalier pour les travaux de la pensée. On sait qu'il se retira d'abord en Hollande, réputée alors comme la terre classique de la liberté; mais bientôt des hommes jaloux et incapables lui suscitent des persécutions personnelles : secouant alors la poussière de ses pieds il reprend le chemin de l'exil, et va chercher, s'il est possible, au milieu des glaces de la Suède, une retraite inaccessible, où il puisse enfin donner un libre essor à son génie.

Cauchy éprouvait vivement ce besoin de liberté et d'indépendance qui est inné chez les âmes d'élite. Après tout ce qui s'était passé et en présence de ce qu'il craignait pour l'avenir, le séjour de Paris lui était devenu insupportable. Les scènes d'émeute qui ensanglantaient les rues de la capitale portaient leur contre-coup dans

son âme et la faisaient bondir de douleur. Comment, dans une telle situation d'esprit, lui eût-il été possible de continuer ses travaux et de poursuivre ses patientes recherches? Ceux qui savent ce qu'exige de méditations calmes et réfléchies l'étude des sciences mathématiques s'étonneront moins de la détermination à laquelle il s'arrêta.

La Suisse fut le premier pays où il porta ses pas, et Fribourg fut la première étape de son exil volontaire. Là il reprit ses travaux un moment interrompus, et chercha dans les ardeurs de l'étude une diversion à ses préoccupations et à ses chagrins. Il avait même conçu l'idée d'organiser autour de lui une réunion de savants, dont le but aurait été de s'appliquer exclusivement au progrès des sciences, loin des révolutions qui agitaient une grande partie de l'Europe. Ce projet n'eut pas de suite, il était peu réalisable à notre époque; cependant il n'était pas impossible, et l'histoire nous montre plus d'une association de ce genre; dans tous les cas la pensée était grande et digne d'un esprit dévoué à la science par un culte pur et désintéressé.

Cauchy ne resta pas longtemps en Suisse, on devait se disputer à l'étranger un savant que la France n'avait pas su conserver. Le roi de Piémont, Charles-Albert, lui fit des offres qui furent acceptées et, dès l'année 1831, Cauchy se rendit à Turin, où l'on créa pour lui une chaire dite de *Physique sublime*. Dans une lettre à sa famille (11 janvier 1832), il fait connaître ainsi sa nouvelle position : « Sur la demande de l'Université de Turin, on a créé une chaire de Physique sublime (c'est autrement dit la *Physique mathématique* que j'enseignais au Collége de France), et je suis nommé pour enseigner cette science avec un traitement de mille écus pour commencer. » Plus tard, il ajoute (14 juillet 1833) : « On a augmenté mon

traitement; on m'alloue de plus 200 francs par chaque livraison d'un nouvel ouvrage que je publie sous le titre de *Résumés analytiques.* » Cette publication faisait suite aux anciens *Exercices de Mathématiques;* elle montrait que le génie du géomètre, quoique transplanté sur un sol étranger, n'avait rien perdu de sa verve ni de sa vigueur.

Le séjour en Italie fut en même temps pour Cauchy l'occasion de visiter les principaux mathématiciens de cette contrée, et de conférer avec eux sur les diverses questions qui l'occupaient. Dans un voyage à Rome, il eut l'honneur d'être admis auprès du Souverain Pontife. Le pape Grégoire XVI, qui joignait à l'éclat de la tiare celui d'une grande vertu et d'une science profonde, était mieux que personne en mesure d'apprécier l'illustre géomètre qui, par son talent et sa piété, honorait à la fois la science et la religion; aussi lui fit-il la réception la plus bienveillante en lui donnant des témoignages tout particuliers de sa paternelle estime.

Cependant la fatigue causée par l'excès du travail, jointe aux émotions pénibles produites par les événements, avait ébranlé sa santé naturellement délicate et l'obligeait à se ménager davantage. « Je ne me hasarderai plus, dit-il dans une lettre, à travailler le soir comme j'ai eu la sottise de le faire il y a quelque temps, afin de mieux conserver la bonne santé dont je jouis maintenant. Sous ce rapport, j'ai beaucoup gagné à voyager, car il est certain qu'au moment où j'ai quitté Paris je me sentais si faible, que je commençais à croire que je n'irais pas bien loin en continuant le même genre de vie. Aujourd'hui, au contraire, je me sens revivre et je me porte beaucoup mieux que je ne le faisais en France. Il est vrai que je suis bien triste : à la perte cruelle que nous avons éprou-

vée (1) se joint la douleur de penser que mon absence est pour vous une affliction de plus. »

Sa famille en effet ne l'avait pas vu sans un profond chagrin prendre la résolution de s'expatrier; mais toutes les démarches faites pour en prévenir l'exécution étaient restées infructueuses. Deux courts voyages de Cauchy à Paris et des visites réciproques de quelques-uns des membres de sa famille ne suffisaient pas pour compenser le vide causé par l'absence. Ses parents et ses amis espéraient toujours un retour prochain. Des explications nombreuses avaient été échangées par lettres à ce sujet, mais comme elles demeuraient sans résultat, M. Eugène Cauchy avait été député auprès de lui par la famille pour hâter ce retour si désiré. On invoquait les raisons les plus capables de le toucher. Outre les considérations tirées de la famille, on lui représentait qu'après tout l'état de la France n'était ni aussi agité, ni surtout aussi désespéré qu'il se le figurait; que le mouvement révolutionnaire se calmait peu à peu; enfin, qu'en restant en dehors de toute position officielle, il retrouverait certainement le calme nécessaire à ses études. Ces motifs ne laissaient pas que de l'impressionner vivement, et il paraissait disposé à céder à de si pressantes sollicitations, lorsque de nouveaux troubles qui éclatèrent à Paris lui firent ajourner encore toute pensée de retour. Du reste le professorat de Cauchy à l'Académie de Turin devait être lui-même de courte durée, et, dès l'année 1833, des événements nouveaux venaient donner à sa carrière un cours tout à fait imprévu. Il était appelé en Allemagne à concourir à

(1) Celle de son plus jeune frère, Amédée, enlevé à l'âge de vingt-six ans.

l'éducation du duc de Bordeaux et à donner ainsi des preuves encore plus complètes de son dévouement et de son affection à cette famille royale pour laquelle la fidélité et l'honneur lui avaient fait tout sacrifier en France.

Le roi Charles X, après la chute de son trône, s'était retiré à Prague avec plusieurs membres de sa famille, parmi lesquels se trouvait le jeune prince qui, né sur les marches d'un trône et destiné à gouverner le plus beau royaume du monde, était soudainement précipité du faîte des grandeurs dans les misères de l'exil et réduit à n'être plus que le dernier représentant d'une auguste dynastie. Un des premiers soins de Charles X fut de pourvoir à l'éducation de ce prince, héritier de tant de rois, dernier rejeton sur lequel reposaient les suprêmes espérances de la maison de Bourbon. Il veilla de bonne heure à ce que son royal pupille reçût une instruction solide et élevée. La première phase de ses études, au sortir de l'enfance, avait eu pour objet de développer son intelligence et de préparer son esprit à de plus vastes connaissances, destinées à adoucir pour lui les amertumes de l'exil et à remplir utilement les longues heures passées, loin de la patrie, à la dure école de la proscription et du malheur. M. Barande avait d'abord continué sur la terre étrangère cette fonction de dévouement commencée sur la terre de France, mais le prince atteignait sa treizième année et il s'agissait de pourvoir à une organisation plus large de ses études. Qui pouvait du reste prévoir l'avenir? Un jour, peut-être, la France, lasse de ses bouleversements et de ses révolutions incessantes, reviendrait encore une fois à ses anciens rois. Telles étaient du moins les dernières espérances du vieux monarque, et, dans cette hypothèse, il fallait que le prince se montrât tout

d'abord à la hauteur du rang où sa destinée pouvait l'appeler.

Parmi les anciens courtisans de la famille royale, un certain nombre lui étaient restés fidèles dans le malheur et avaient été admis à l'honneur de la suivre dans l'exil; c'est parmi eux qu'on choisit le personnel de la maison du prince. A l'époque dont il s'agit, M. le baron de Damas remplissait les fonctions de gouverneur. Ce fut lui qui proposa de faire appel au dévouement de Cauchy, pour lui confier la partie scientifique des études. Le père Place fut en même temps chargé d'enseigner les lettres et l'histoire. L'année suivante, cette dernière tâche fut remise aux mains de Mgr Frayssinous, évêque d'Hermopolis, qui arriva à Prague vers la fin de 1833.

Aux premières ouvertures qui lui furent faites, Cauchy ressentit d'abord autant de surprise que d'émotion. Après bien des traverses, il avait enfin trouvé un séjour tranquille et une position qui suffisait à ses modestes désirs; son unique ambition était désormais de poursuivre sans relâche le cours de ses découvertes scientifiques dans la paisible retraite que les événements lui avaient ménagée. Mais, d'un autre côté, il s'agissait de continuer à ses princes les preuves de dévouement qu'il leur avait données avec éclat et par un mouvement tout spontané. Répondrait-il par un refus, maintenant qu'on lui adressait un appel direct? Il eût hésité sans doute s'il se fût agi de mener la vie des cours près d'un prince régnant, mais c'était à devenir *courtisan de l'exil* qu'on le conviait; cette pensée le décida et, considérant comme un ordre l'invitation de son roi, il se fit un point d'honneur de tout quitter pour s'y rendre.

CHAPITRE VI.

ÉDUCATION DU PRINCE.

Dieu et la vérité, telle sera ma devise.
AUG. CAUCHY.

Principes de Cauchy relativement à cette éducation — Appel aux hommes de bons sens et de bonne foi. — Détails sur son séjour auprès de la cour exilée. — Il continue ses travaux scientifiques. — Mémoires sur la théorie de la lumière. — Voyages en Allemagne. — Cauchy reçoit le titre de baron. — Il revient en France.

Que de théories n'a-t-on pas imaginées, que de livres n'a-t-on pas écrits sur l'éducation des princes? Et, en effet, quel problème plus digne de fixer la pensée d'un homme d'État? Quelle affaire de plus grave conséquence pour le sort d'un peuple? Nous sommes dans un siècle où la personnalité des princes ne peut manquer de jouer, par elle-même, un grand rôle. Autrefois le prestige de la souveraineté suffisait pour les mettre à couvert; de nos jours, leur éducation se fait souvent dans l'exil; ils sont exposés à recevoir les dures leçons des événements, et il faut que la valeur qu'ils puisent dans une éducation virile et solide les mette, à la fois, en état d'user avec honneur de la bonne fortune et de dominer la mauvaise.

Les anciens nous offrent plusieurs exemples célèbres d'éducations royales, mais ils se préoccupaient surtout de façonner les princes dans l'art du commandement et de les initier aux habiletés de la politique; il manquait

du reste à leurs préceptes une force que ne pouvait leur communiquer la morale païenne. Cette force, le christianisme seul la possède; lui seul peut parler aux princes avec autorité en leur rappelant que, s'ils sont élevés au premier rang, c'est pour être les protecteurs de leurs peuples et pour travailler à leur bonheur; lui seul peut les maintenir dans le devoir, en leur montrant ce grand Dieu devant lequel ils doivent paraître un jour et qui leur demandera un compte rigoureux de leurs actes; lui seul enfin peut faire pénétrer dans leurs cœurs ces maximes sublimes qui rehaussent encore le sentiment naturel du devoir et qui sont, en définitive, la meilleure garantie de bonheur pour les sujets.

Telles furent les maximes qui guidèrent Bossuet et Fénelon dans l'éducation du Dauphin et dans celle du duc de Bourgogne. On sait avec quel zèle ces deux illustres précepteurs s'acquittèrent de leur mission. Si leurs efforts ne furent pas couronnés d'un égal succès, ce fut surtout là où la nature avait laissé le plus à faire que, sous la main de Fénelon, l'influence d'une éducation ferme et chrétienne développa, dans l'esprit et dans le cœur de son royal élève, les plus éminentes qualités. La Providence n'a pas permis que les vertus de ce prince portassent leurs fruits sur le trône pour lequel elles avaient été préparées et mûries; sans le malheur de sa mort prématurée, on peut penser que bien des calamités eussent été épargnées à la France, qui n'aurait eu peut-être à subir ni les hontes du règne de Louis XV, ni la sanglante révolution où s'abîma la monarchie sous Louis XVI.

Bossuet et Fénelon, tels sont les grands modèles que Cauchy se proposa d'imiter. Lui aussi avait à prendre sa part dans l'éducation de l'héritier de ses rois, d'un prince qui avait à se montrer digne du trône, même après en

avoir été déshérité par les rigueurs de la fortune. On verra bientôt qu'il ne négligea rien pour s'acquitter avec honneur de la mission qui lui était confiée.

Il serait intéressant de suivre le savant dans les détails d'une œuvre si nouvelle pour lui et de rechercher dans ses écrits la trace de sa méthode. En outre de l'immortel *Discours sur l'histoire universelle,* Bossuet avait composé pour son royal élève une foule de traités remarquables; Fénelon avait écrit dans un but semblable ses fables et son poëme du Télémaque où, sous le charme des fictions et la magnificence du style, il exposait les grandes idées et les doctrines généreuses qu'il s'efforçait d'inculquer à son disciple. C'est là que ces illustres maîtres se retrouvent tout entiers. Il est permis de penser que, dans l'ordre des sciences, Cauchy n'eût pas été incapable de produire lui-même quelque ouvrage capital, également profitable à l'instruction du jeune prince et aux progrès de l'esprit humain. Toutefois il comprit sa tâche à un point de vue plus modeste et peut-être aussi plus utile pour le but spécial qu'il se proposait. Dans ces ouvrages des grands maîtres, en effet, on admire volontiers la sublimité des pensées, la beauté de la composition, la richesse du style, mais on sent souvent que l'auteur oublie un peu trop son disciple pour s'adresser à la postérité; il semble n'écrire que pour un enfant, et en réalité c'est pour les esprits supérieurs de tous les pays et de tous les temps. Il reste toutefois de Cauchy, sur cette matière, un Mémoire très-remarquable intitulé : « *Quelques mots adressés aux hommes de bon sens et de bonne foi,* » qu'il voulut publier avant de se rendre auprès de Charles X, et dans lequel il explique les motifs de sa détermination, les principes qui doivent le guider et la méthode qu'il se propose de suivre. Nous allons en donner l'analyse.

« Ayant dû renoncer, dit-il en commençant, aux trois chaires que j'occupais en France, pour rester fidèle à mes serments, j'étais chargé à l'université de Turin du cours de Physique sublime que Sa Majesté le roi de Sardaigne avait daigné me confier. Heureux de me trouver ainsi en dehors de la scène politique, et entièrement adonné à la culture des sciences, je venais de mettre au jour deux nouveaux calculs qui me semblaient de nature à fixer l'attention des géomètres; je songeais à publier mes travaux sur la théorie des nombres et à compléter mes recherches sur la théorie de la lumière, lorsqu'un ordre du Roi de France est venu me tirer de ma paisible retraite, et me donner pour élève l'héritier de saint Louis, de Henri IV et de Louis XIV. Ainsi transporté tout à coup des abstractions du monde idéal dans un poste qui fait peser sur ma tête une grande responsabilité, je me dois à moi-même d'expliquer les motifs de mon acceptation. L'amour des auteurs pour leurs propres ouvrages, l'ardeur avec laquelle ils se passionnent pour les théories qu'ils inventent, sont assez connus pour que l'on conçoive aisément combien il doit m'en coûter d'interrompre les travaux scientifiques que j'avais entrepris. Mais ce dont ma faiblesse aurait pu s'effrayer, lorsque mon Roi était sur le trône et dans le palais des Tuileries, je ne saurais le refuser à mon Roi dans l'exil, à l'enfant du miracle, portant la double couronne de la gloire et du malheur. Étranger au langage des cours et à l'art de flatter les grands, je n'apporte à mon Roi qu'un cœur fidèle et une vie sans reproche. Des amis m'avaient précédé dans ce pays tout nouveau pour mon inexpérience. Je ne les y retrouve plus. Si je ne consultais que mes propres forces, j'y verrais un nouveau motif pour craindre de me lancer dans une carrière si difficile; mais, je le sais, la grande

pensée qui préside à l'éducation du Prince est une pensée morale et religieuse qui, puisant ses inspirations aux sources les plus élevées, est seule propre à former les grands princes et les grands rois; cette pensée qui, plaçant les souverains de la terre en présence du Dieu de l'univers, les invite à se rapprocher, par leurs vertus, de celui dont la sagesse et la bonté n'ont point de bornes, leur dévoile la vérité tout entière et prépare ainsi la félicité des peuples et la prospérité des empires; cette pensée sublime, mon Roi m'ordonne de la seconder de mes efforts, de concourir même à son accomplissement, et j'ai la conviction intime qu'elle seule peut fixer l'avenir de l'Europe, assurer le repos de la société. J'oserai donc répondre à la voix qui m'appelle et ne reculerai point devant les obstacles. »

Dans ce langage noble et digne on retrouve Cauchy tout entier. On le retrouve d'abord avec sa simplicité et sa modestie. Loin de s'enorgueillir d'un choix dont le prix était si grand à ses yeux, il n'envisage que les devoirs de sa charge et craint de ne pouvoir y suffire. On le retrouve avec son esprit de généreux dévouement qui, pour obéir à la voix de celui qui est resté son Roi, lui fait tout quitter et sacrifier jusqu'à ses chères études, but suprême de ses pensées et de sa vie. On le retrouve enfin avec sa raison pleine de calme et de sagesse. Après les événements qui avaient si profondément blessé son âme et indigné sa conscience, on pouvait s'attendre à quelque protestation énergique contre le nouvel ordre de choses, à quelque attaque passionnée contre le nouveau gouvernement de la France, mais ce serait mal comprendre l'élévation de ses sentiments et la bonté de son cœur. Il se bornera à plaindre des hommes qui lui paraissent égarés et aveugles plus que coupables; ainsi donc, pas

un mot de récrimination ne sortira de sa bouche et pas un sentiment haineux ne partira de son cœur; il se contentera de proclamer les principes éternels de la justice et de l'honneur, et d'adresser un appel éloquent à tous les hommes de dévouement et de bonne volonté.

On pouvait craindre encore qu'une telle éducation, donnée loin de la patrie, au milieu des amertumes de l'exil, n'en ressentît une fâcheuse influence. Cauchy prévient ce reproche et se place tout de suite dans une région plus élevée. Il sera de son époque et ne s'attachera pas inutilement à faire revivre le passé. Des temps nouveaux se préparent, et avec tous les hommes de cœur il attend et salue avec amour une ère nouvelle de gloire et de bonheur. « C'est à préparer cette nouvelle ère, c'est à se rendre dignes dès aujourd'hui de coopérer plus tard aux grands desseins de la Providence, que sont appelés tous ceux qui portent un cœur généreux et particulièrement cette jeunesse française dont le courage s'enflamme aux seuls noms de l'héroïsme et de l'honneur.

» Ce n'est pas seulement aux royalistes, ajoute-t-il, ni aux catholiques que je m'adresse; ce n'est pas seulement à ceux qui ont refusé de servir un pouvoir nouveau, à ceux qui sont restés fidèles à la religion de leurs pères; c'est encore à ceux-là même dont l'âme est agitée par des passions qu'ils ne croient pouvoir maîtriser; à ceux qui, séduits par des théories mensongères, ne parlent que de république et se sont armés contre les rois, et (ce qui étonnera peut-être davantage) ce n'est pas des droits de Henri V que je viens les entretenir; Dieu et la vérité : telle sera ma devise.

» La vérité : tel doit être l'objet de nos désirs et de nos efforts; la vérité est l'arche salutaire qui peut recueillir la société prête à disparaître dans l'abîme, la

vérité seule peut encore sauver l'Europe et le monde des fureurs de l'anarchie. Établir le règne de la vérité, telle doit être la tâche de tous les hommes de bonne volonté et surtout celle du Prince appelé à fixer les destinées de la France. Pour coopérer à une œuvre si importante, il suffira que lui-même s'efforce de reproduire à tous les yeux l'image de la sagesse et de la bonté divine, et qu'il porte profondément gravé dans son cœur l'amour de la vérité. Un tel prince fera le bonheur de son peuple et sera juste envers tous: car il saura qu'il doit rendre compte de l'exercice de sa puissance, non aux hommes qu'on peut abuser par des promesses mensongères, mais à Dieu qu'on ne trompe jamais. Loin de craindre pour la religion les investigations des savants et les discussions approfondies, il favorisera toutes les entreprises faites dans l'intérêt de la science; il propagera en tous lieux, non ces fausses lumières qui frappent de mort les intelligences en les plongeant dans l'abîme du doute universel, mais les véritables lumières; celles qui perfectionnent les esprits sans corrompre les cœurs; celles qui ne diminuent pas, mais augmentent pour l'homme le nombre des vérités déjà connues, et le font remonter d'une vérité à une autre, jusqu'à la source de la vérité même. Il saura qu'il importe de répandre ces lumières, non-seulement dans les derniers rangs, mais encore dans toutes les classes de la société; qu'il importe d'éclairer le riche comme le pauvre, la jeunesse et l'âge mûr; d'éclairer les ignorants, d'éclairer les savants eux-mêmes qui n'embrassent des systèmes dangereux pour l'ordre social que lorsqu'ils ont le malheur de ne pas connaître la vérité tout entière ou de rejeter une partie de la vérité connue.

» La source de tous nos maux vient de ce que nous

avons trahi la cause sainte de la vérité. Depuis quarante ans les peuples et leurs chefs se sont égarés dans de vaines théories; tous doivent aujourd'hui se rencontrer sur le même terrain et se réunir sous la même bannière, et c'est vers la vérité et vers Dieu qu'ils doivent se retourner. « Comme un pilote égaré, a dit un grand écrivain, » les peuples ont perdu leur route, ils ne la retrouveront » qu'en regardant le ciel. » La vérité seule peut donc guérir nos maux, et le premier soin du Prince qui viendra cicatriser les plaies de la France devra être de fonder son pouvoir sur la justice et la vérité. Le premier devoir de ceux qui l'instruisent est donc de lui révéler tout le prix de cette vérité, de laquelle il tirera quelque jour sa force et sa gloire; et l'on ne s'étonnera point qu'appelé à remplir une partie de cette honorable tâche, je croie ne pouvoir mieux servir les intérêts de ma patrie, qu'en dévoilant à l'héritier de Louis XIV tout le secret de cette haute philosophie qui a fait briller le grand siècle d'un si vif éclat; qu'en lui apprenant comment l'intelligence humaine doit s'élever de la contemplation des beautés de la nature au Dieu dont l'amour veille sans cesse sur cet univers qu'il a créé; remonter de l'étude de ces lois sublimes qui régissent le cours des astres jusqu'au législateur suprême qui a semé les étoiles dans les voûtes du firmament, et, pour tout dire en un mot, de la connaissance des vérités scientifiques au principe éternel de toute vérité. »

Voilà de grandes et généreuses pensées; ce sont celles qu'il tâchera d'inspirer à son royal disciple. Il n'est pas douteux qu'un prince élevé dans ces idées ne fût digne de notre admiration; on pourrait craindre seulement qu'il ne fût plutôt un philosophe qu'un homme d'État et qu'il s'entendît mieux à méditer sur la morale et les

sciences qu'à gouverner ses peuples. Mais telle n'est point la pensée de Cauchy; ces nobles maximes, ces sentiments élevés ne sont pas destinés à rester dans le domaine des spéculations; après se les être appropriés, le prince devra s'efforcer de les faire passer dans la pratique et de les prendre pour guide de sa conduite, et, afin qu'on ne s'y trompe pas, l'auteur va nous tracer, dans un magnifique tableau, l'idéal d'un grand prince, le portrait de celui qu'il entreprend de former.

« Grand dans la paix, ce Prince ne redoutera pas la guerre. Instruit par cette religion qui nous ordonne de rester fidèles à nos devoirs, même au péril de notre vie, il s'empressera, s'il le faut, dans l'intérêt de la justice, de saisir cette épée que le maître du tonnerre aura déposée entre ses mains. Mais à l'exemple des saints rois, il ménagera le sang de ses peuples et se rappellera qu'aux yeux des chrétiens les triomphes mêmes cessent d'être glorieux quand la guerre cesse d'être légitime. Il saura, comme saint Louis, allier la valeur dans les combats avec la modération dans la victoire. Il puisera dans la foi de ses pères cette constance, cette grandeur d'âme qui caractérisent les vrais héros; cette pureté de mœurs qui rehausse encore l'éclat du courage; cette douceur, cette bonté que sembleraient exclure les vertus guerrières et qui les porte à voler au secours de la faiblesse ou de l'infortune. Il honorera le vrai courage, le courage que nul obstacle n'intimide, que nul sacrifice n'épouvante lorsque la voix de la conscience a parlé; ce courage qui a signalé tant d'illustres capitaines, tant de preux chevaliers, tant de soldats intrépides, depuis les Maurice et les Jeanne d'Arc jusqu'aux Turenne, aux Condé, aux Larochejacquelein; depuis les soldats de la légion Thébéenne jusqu'aux paysans de la Vendée. Dans le tumulte des

camps et sous la tente des guerriers, il abaissera son front devant le Tout-Puissant, il ne craindra pas de s'avouer hautement adorateur du Dieu des armées; il ne saura point rougir de cette croix qui a sauvé le monde, qui a préservé l'Europe du joug des Sarrasins et qui seule aujourd'hui peut y assurer le triomphe de l'ordre sur le désordre, de la justice sur les passions déchaînées. *In hoc signo vinces.* »

On trouvera peut-être ce tableau trop parfait pour notre temps; on le trouvera surtout trop chrétien. Il n'est pas douteux en effet qu'avec nos mœurs et après l'incrédulité du siècle dernier, le rôle d'un tel prince ne soit rendu très-difficile; et cependant pense-t-on que Charlemagne ou saint Louis, s'ils revenaient au milieu de nous, ne trouveraient plus rien à faire et que leur génie et leurs vertus seraient fatalement condamnés à l'impuissance? Ce serait calomnier notre époque; quoi qu'on puisse dire, notre société est toujours chrétienne par le fond des entrailles, et rien de ce qui touche à la vie de la foi ne saurait lui être indifférent. Où sont encore aujourd'hui la grandeur, la sainteté, la force morale, si ce n'est dans l'Église et dans son chef? Et pourquoi un chef de peuples n'ambitionnerait-il pas, lui aussi, d'en faire resplendir l'éclat autour de sa couronne? Mais lors même qu'on ne verrait ici qu'un portrait idéal inspiré par l'enthousiasme de la foi chrétienne, il n'était pas moins digne d'un cœur généreux de le concevoir et de se dévouer avec ardeur à la réalisation d'un si beau modèle; c'est à quoi le savant s'employa avec toute l'énergie de son âme.

De son côté, la famille royale fit à Cauchy l'accueil le plus flatteur et ne cessa de lui témoigner la plus grande bienveillance; on voulait honorer en lui à la fois l'élé-

vation du génie et la noblesse d'une fidélité généreuse. En 1834, Mme Cauchy vint le rejoindre elle-même à Prague, et il put ainsi, dans sa nouvelle position, réunir les affections les plus douces de la famille au dévouement à la science et à ses princes. Son bonheur eût été complet s'il avait pu y retrouver aussi ce père vénéré, cette mère chérie auxquels il portait tant d'affection, s'il avait pu comme autrefois se mêler à la foule des fils et des petits-fils qui venaient, aux jours habituels, « s'asseoir autour de la table paternelle comme de jeunes plants d'olivier, et réaliser ainsi la bénédiction promise par le prophète à l'homme qui craint le Seigneur. » (Lettre du 17 août 1835.)

Ses fonctions auprès du prince étaient loin de constituer une sinécure; son temps était au contraire fort occupé. Une lettre écrite de Prague par Mme la baronne Cauchy à sa famille contient d'intéressants détails à ce sujet. « Vous avez vu avec plaisir tout le bon accueil que nous avons reçu ici et que nous ne pouvons devoir qu'à l'excessive bienveillance qu'on a pour Augustin. On ne saurait être dans une position plus agréable que la sienne; mais en même temps je dois dire, pour la justification des reproches que nous lui faisions de ne pas écrire, qu'il n'a pas un instant à lui. Je ne le vois guère qu'à l'heure du dîner et quelques moments le soir. Dans la matinée, les leçons qu'il donne, celles auxquelles il assiste, les promenades, dont il est presque toujours, ne lui laissent qu'à peine le temps d'ajouter chaque jour quelques mots ou signes algébriques à un Mémoire qu'il compose en ce moment et qu'il compte envoyer à l'Académie dès qu'il sera terminé. Au reste il ne peut y avoir une manière plus agréable d'occuper son temps que de le donner à un prince si accompli et si charmant. »

Ces occupations attachantes étaient fréquemment interrompues par des excursions ou des voyages où Cauchy devait accompagner son royal élève. En 1834, on le trouve à Prague, au château du Hradschin, résidence princière que la famille impériale d'Autriche avait mise à la disposition de Charles X. L'année suivante, on le rencontre à Tœplitz; en 1836, il va successivement à Budweitz, à Kirchberg et à Goritz, où le roi Charles X terminait paisiblement son orageuse carrière; en 1838, on le retrouve de nouveau à Kirchberg. Malgré tous ces changements de résidence, il trouvait encore le moyen de poursuivre avec ardeur ses travaux scientifiques. Plusieurs ouvrages importants datent de son séjour en Allemagne. L'Académie de Prague l'avait accueilli avec empressement au nombre de ses membres, et c'est par les soins de cette Société, et à ses frais, que furent publiés les célèbres Mémoires relatifs à la *dispersion de la lumière*.

Ses voyages ne lui étaient d'ailleurs pas inutiles. Ils avaient l'avantage de le mettre en rapport avec les principaux savants de l'Allemagne; partout il recevait l'accueil le plus cordial en même temps qu'il était témoin de l'estime dont jouissaient déjà ses travaux. En arrivant à Lintz chez le professeur de mathématiques de l'université, il trouvait sur la table de ce savant la traduction faite par lui-même du récent ouvrage sur la théorie de la lumière. A Vienne il voyait ses méthodes pour l'exposition de l'analyse infinitésimale préférées à celles de tous les autres auteurs. Il apprenait en même temps qu'on traduisait partout ses ouvrages : en italien, en allemand, en russe, en espagnol, et qu'on les adoptait jusque dans le nouveau monde. A Londres, en particulier, on s'était beaucoup occupé de sa théorie sur le phénomène de la disper-

sion, et divers auteurs publiaient dans les *Transactions philosophiques* des Mémoires ayant pour objet de commenter ses découvertes et d'en confirmer l'exactitude.

A toutes ces preuves d'admiration ou d'estime venaient se joindre les témoignages, non moins précieux pour lui, d'amitié ou de reconnaissance de la part de la famille royale. Nous avons déjà dit avec quels sentiments de bienveillance il fut accueilli par la cour exilée; ces sentiments ne lui firent jamais défaut; le jeune prince surtout conserva toujours pour son maître une vive affection et une profonde reconnaissance, et plus tard, nous en citerons un témoignage non douteux à l'occasion de la mort de l'illustre savant.

Le vieux monarque voulut lui-même donner une preuve éclatante de son estime pour le précepteur de son petit-fils. Il n'avait plus à sa disposition les faveurs ou les places qui permettent aux princes de récompenser dignement les bons services de leurs sujets, mais il pensa qu'une ressource lui restait encore, dans la majesté de son infortune, pour témoigner sa reconnaissance aux fidèles compagnons de son exil : c'était de les anoblir. Ce fut en effet pendant son séjour auprès de la famille royale que Cauchy reçut ce titre de baron dont il se montra toujours fier à si bon droit, et qui lui fut accordé de la manière la plus délicate et la plus gracieuse. On fêtait encore dans la cour exilée quelques-uns de ces anniversaires qui se célébraient autrefois au milieu des grandeurs et des pompes de la royauté. L'éclat des cérémonies avait disparu pour faire place à de petites fêtes de famille dont les apprêts étaient bien simples; l'union des cœurs et quelques modestes présents en faisaient tous les frais. C'est dans un de ces jours de fête que le jeune prince offrit à son maître, comme cadeau, son por-

trait avec cette inscription : « A mon cher baron Cauchy. » Quoi de plus touchant que ces lettres de noblesse ainsi données dans l'exil et doublement consacrées par le malheur et par le dévouement!

Cependant l'éducation du prince touchait à son terme et Cauchy, après avoir noblement accompli sa tâche, allait de nouveau se trouver rendu exclusivement à ses travaux scientifiques. Mais en même temps l'avenir se présentait devant lui avec toutes ses incertitudes. Devait-il continuer de vivre dans l'exil et de demander à l'étranger une retraite qui lui avait d'abord paru nécessaire? Dans cette hypothèse, il n'est pas douteux qu'il lui eût été fait de divers côtés des offres avantageuses. Turin l'avait déjà accueilli avec empressement quelques années auparavant, et des exemples célèbres, dont le souvenir était encore récent, pouvaient lui conseiller de porter ailleurs le tribut de sa gloire et de son génie. Dans le siècle précédent, Euler avait quitté la Suisse, sa patrie; la Prusse et la Russie l'avaient possédé successivement, et les académies de Berlin et de Saint-Pétersbourg avaient été illustrées par ses immenses travaux. Plus près de lui, Cauchy rencontrait encore l'exemple de son ancien protecteur Lagrange. Ce grand géomètre, après avoir débuté avec éclat à Turin, avait accepté les offres brillantes du roi Frédéric II : il avait, pendant vingt années, présidé l'Académie des Sciences de Berlin; puis, à la mort de Frédéric, attiré en France par Louis XVI, il n'avait pas cessé d'être traité avec tous les honneurs dus à son génie. Cauchy n'était pas inférieur à ces grands hommes et pouvait céder à la même ambition; on peut ajouter aussi, qu'après tout ce qui s'était passé, il avait des motifs plus particuliers pour accepter, loin de son pays, des offres de cette nature.

Mais d'un autre côté le moment n'était-il pas venu pour lui de rentrer en France et d'essayer de s'accommoder avec les hommes et les événements de son temps? Les circonstances paraissaient plus favorables, les esprits s'étaient calmés, un ordre régulier avait fini par s'établir et les craintes excessives du savant ne s'étaient pas réalisées. Il voyait au contraire une foule d'hommes généreux et chrétiens appartenant à la génération nouvelle qui, décidés à rompre avec le passé, réunissaient leurs efforts pour préparer la venue de temps meilleurs. Resterait-il systématiquement en dehors de ce mouvement pacifique et n'apporterait-il pas lui-même son contingent à cette œuvre sacrée? Telles étaient les considérations qui se pressaient dans son esprit et qui le préparaient peu à peu à un retour si désiré par les siens; mais ce qui acheva de le décider, ce furent les appels renouvelés de sa mère au moment où allait se célébrer en famille le cinquantième anniversaire d'une union sur laquelle tant de bénédictions étaient descendues dans le cours d'un demi-siècle.

CHAPITRE VII.

RETOUR EN FRANCE.

Ea. . hominibus non minus quam liberi cara sunt, libertas, honestas, dignitas.
Cic., *Epist. ad fam.*

Cauchy rentre à l'Académie. — Il est proposé pour une chaire. — Il refuse le serment. — Il est nommé au Bureau des Longitudes. — Débats soulevés par cette nomination. — Événements de 1848. — Cauchy rentre dans l'enseignement. — Événements de 1852. — Cauchy est dispensé du serment par l'Empereur.

Cauchy revint en France vers la fin de 1838. Sa résolution bien arrêtée était de demeurer complétement étranger aux événements politiques, mais en même temps de conserver intactes des convictions qui s'imposaient à lui avec plus de rigueur que jamais, et s'élevaient à ses yeux presque à la hauteur de la foi religieuse. L'étude, les affections de famille, la pratique assidue des bonnes œuvres devaient désormais occuper tous ses moments.

Sa première démarche fut de reparaître à l'Institut. En vertu d'un privilége spécial, les Membres de cette illustre compagnie étaient dispensés du serment. Cauchy venait, comme on l'a remarqué (1), reprendre sa place parmi ses anciens collègues, « sans autre condition que

---

(1) Lettre de M. Biot à M. de Falloux.

de le vouloir, ainsi que cela s'est toujours pratiqué. » On y désirait vivement son retour et on y était d'ailleurs préparé depuis quelque temps par de fréquentes communications insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. A partir de ce moment, débarrassé de toute préoccupation extérieure, il se mit à poursuivre avec une ardeur croissante le cours de ses recherches. Nous en présenterons plus loin l'analyse; disons seulement, pour donner une idée de la puissance de son génie mathématique, que, pendant les dix-neuf dernières années de sa vie, il publia dans les divers recueils de l'Académie plus de cinq cents Mémoires. Il ne se passait guère de semaine sans qu'il apportât un Mémoire nouveau ou qu'il vînt faire de vive voix d'intéressantes communications. Sa fécondité était inouïe : on comprend difficilement comment un seul homme a pu suffire à tant de travaux. Et sa pensée n'était pas concentrée sur tel ou tel point de la science; les questions les plus élevées et les plus variées de l'Analyse, de la Mécanique, de la Physique, de l'Astronomie ont été abordées par lui avec un égal bonheur, et partout son passage était signalé par un progrès sérieux, par une découverte importante.

Cependant tous les amis des sciences déploraient vivement qu'un homme d'un mérite aussi supérieur fût systématiquement écarté de toutes les chaires où son enseignement eût été si précieux, et se trouvât privé de toutes les récompenses dues à son talent. On s'occupa de remédier à un état de choses si regrettable, et, au premier abord, on ne désespéra pas d'y parvenir. Vers 1840, une place devint vacante au Collége de France; une présentation devait être faite par l'Académie des Sciences, et d'un accord unanime, les suffrages se portèrent sur Cauchy; mais le fatal serment se représentait avec toutes ses

rigueurs, et moins que jamais on pouvait l'attendre du savant.

Il y avait, à la vérité, une haute position scientifique où il semblait qu'on pût admettre Cauchy sans lui demander rien de contraire à ses principes ni à sa conscience, c'était celle de Membre du Bureau des Longitudes. Par une disposition particulière de la loi qui l'a fondée, les Membres de cette Société se recrutent eux-mêmes. Pour les chaires du Collége de France et de la Sorbonne, il y a une double présentation faite par les Membres de ces corps savants et par ceux de l'Académie des Sciences, mais là se bornent leurs pouvoirs, et le Gouvernement s'est réservé, à lui seul, le droit de nomination. Il en est autrement pour le Bureau des Longitudes comme pour les diverses Académies; lorsqu'une place devient vacante, les Membres de ces Compagnies choisissent eux-mêmes le savant qui doit l'occuper, sans que l'Administration ait à intervenir; la seule condition à remplir est que le choix arrêté reçoive la sanction du Chef de l'État. La situation était donc très-différente, et, dans ces conditions, il ne semblait pas douteux que Cauchy ne dût entrer au Bureau des Longitudes et ne reçût ainsi, sinon la récompense entière de son mérite, du moins une position assez élevée pour le dédommager de ce qu'il ne pouvait obtenir. On pensait même que ce serait offrir au Gouvernement une occasion heureuse de réparer une injustice, sans l'obliger à des concessions difficiles et sans lui créer des précédents embarrassants pour l'avenir. On se trompait.

Dès l'année 1839, la mort de M. de Prony laissait une place vacante au Bureau des Longitudes; la candidature de Cauchy fut posée et accueillie avec empressement au sein du Bureau. On se rappelle même que M. Arago

recevait assez mal les autres solliciteurs; à toutes leurs démarches, il répondait invariablement : « M. Cauchy se met sur les rangs ; » et si l'on insistait, il se contentait de répéter avec un mouvement d'humeur : « mais, Monsieur, je viens de vous dire que M. Cauchy est sur les rangs. » Ce nom réunit en effet l'unanimité des suffrages. L'élection était donc faite régulièrement, et il n'y manquait plus que la sanction royale; elle fut refusée, ou, ce qui était au fond la même chose pour Cauchy, elle fut subordonnée à la condition du serment. Cette décision inattendue remplit d'étonnement et de douleur les amis du savant et tous ceux qui connaissaient les exigences de sa conscience et de son honneur. On pensa d'abord que la difficulté n'aurait pas de suite, et qu'il serait possible de faire revenir le Gouvernement sur son premier dessein.

Il y avait alors dans le Conseil du Roi des hommes également recommandables par l'élévation de leur talent et par l'honorabilité de leur caractère. On ne peut douter que leur désir le plus vif n'eût été d'obtenir une solution conforme au vœu général, mais leurs bonnes dispositions étaient paralysées par une volonté supérieure; aussi, malgré leurs efforts, l'obstacle demeura insurmontable. On espéra être plus heureux du côté de Cauchy, et on lui fit adresser les sollicitations les plus pressantes pour obtenir de lui quelques concessions. Le pouvoir n'ayant pas voulu se départir de ce qu'il prétendait être son droit, on essaya d'amener le savant à revenir sur ce qu'il considérait comme un devoir de conscience et d'honneur. Il est facile de se rendre compte du prix qu'y aurait attaché le Gouvernement lui-même. La situation des ministres était en effet fort embarrassante : on les rendait, peut-être à tort, responsables de la mesure; on s'étonnait de ce que

des hommes, habitués autrefois à revendiquer si haut les droits de la liberté, fussent impuissants, alors qu'ils étaient au pouvoir, à les faire triompher en faveur d'un savant dont le génie et le noble caractère étaient l'objet de l'estime universelle. Cauchy résista à toutes les sollicitations et demeura inébranlable dans sa résolution ; cet homme, si doux et si simple dans toute sa vie, si tolérant et si bienveillant pour tout le monde, devenait inflexible devant l'idée d'un devoir, et rien ne pouvait lui faire accepter une capitulation de conscience.

Il ne faudrait pas croire cependant que ce sacrifice qu'il faisait à la délicatesse de ses convictions lui fût peu coûteux ou peu sensible; en réalité, il le ressentait vivement et ne prenait pas la peine de le cacher. Un homme doué d'un caractère plus stoïque, après avoir répondu par un refus éclatant, se serait ensuite drapé dans la dignité d'un silence fier et dédaigneux; une telle conduite eût été plus solennelle, plus romaine, mais on peut dire qu'elle eût été moins conforme aux sentiments de la nature humaine. Pour lui, sa nomination au Bureau des Longitudes et l'unanimité des suffrages de ses collègues étaient la plus belle et la plus douce récompense de ses travaux. Il voyait d'ailleurs dans cette fonction spéciale et élevée, une sorte de professorat européen qui lui servirait à répandre au loin, avec l'autorité inhérente à un corps si haut placé, les méthodes astronomiques perfectionnées qui furent alors un des objets principaux de ses études, et pour lesquelles les chaires du Collége de France et de la Sorbonne lui étaient fermées par ce même refus de serment. Il ne se laissa donc point décourager. Longtemps il espéra que les difficultés pourraient s'aplanir, et, qu'avec un peu de patience et de diplomatie, il finirait par en triompher. Les hommes de cette époque

se rappellent encore avec quelle habileté il entretenait le zèle de ses amis, de ses collègues, et comment il déployait auprès de tous les ressources d'une politique à la fois ingénieuse et naïve.

Dans ces circonstances on prit le parti de temporiser et d'attendre quelque solution imprévue de ce singulier conflit. Mais le temps, qui résout bien des difficultés, semblait se complaire à compliquer celle-ci. Les Membres du Bureau des Longitudes, forts de leur droit et heureux de leur premier choix, persistaient à regarder Cauchy comme leur confrère légitime et se refusaient à lui nommer un successeur. De son côté, Cauchy, considérant sa nomination comme régulière, s'empressa de remplir les devoirs attachés à sa nouvelle position, et de justifier de plus en plus le choix dont il avait été l'objet, par des travaux astronomiques de la plus haute importance. Il n'assistait pas aux séances, il n'émargeait pas les feuilles de traitement, mais il remplissait du reste toutes les fonctions de Membre du Bureau des Longitudes, et l'on peut dire qu'il fut l'une des illustrations de cette savante compagnie. Son élection avait en effet révélé à ses amis un côté de son talent qui ne s'était pas encore produit dans tout son jour. Jusqu'alors on s'était plu à reconnaître en lui le géomètre éminent, l'analyste profond, le savant auquel la Physique mathématique devait ses plus brillants progrès; mais la France ne savait pas encore qu'elle possédait un astronome de premier ordre. Nous essayerons en son lieu de donner une idée de ses travaux dans ce genre. On verra quel éclat ils ajoutèrent à ses titres scientifiques déjà si nombreux, et combien il est à regretter qu'une mesure politique ait empêché son génie de se donner un libre essor dans cette carrière nouvelle.

Cependant le provisoire durait déjà depuis près de

quatre ans, et la question n'était pas plus avancée que le premier jour. Pour mettre un terme à cette situation anormale, le Ministre décida, en 1843, que la nomination de Cauchy serait comme non avenue pour refus de serment, et qu'on procéderait à une nouvelle élection. Cauchy, qui avait jusqu'alors gardé le silence, crut devoir protester publiquement. Il le fit dans une lettre adressée aux Présidents de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, et qui fut en outre communiquée à tous ceux que l'affaire pouvait intéresser. Cette lettre est trop importante pour ne pas être rapportée; elle fera connaître au juste l'état de la question, elle montrera en même temps combien la conduite du savant avait été digne, et combien elle s'éloignait à la fois d'une faiblesse peu convenable et d'une opiniâtreté orgueilleuse ; son noble caractère s'y révèle tout entier. En voici le texte :

« Monsieur le Président, vous savez combien j'ai été reconnaissant de l'honneur que m'a fait le Bureau des Longitudes, au mois de novembre 1839, en m'appelant, comme géomètre, à remplir la place vacante dans son sein par le décès de M. de Prony. Je ne serais pas digne de cet honneur ni de l'estime dont Messieurs les Membres du Bureau ont bien voulu me donner tant de témoignages, si j'admettais un seul instant qu'une nomination faite en vertu d'une loi n'a rien de sérieux, et qu'un Membre du Bureau des Longitudes, nommé depuis quatre ans, peut être brusquement destitué par un Ministre, sans avoir été entendu, et, par conséquent, avant même qu'il soit possible d'alléguer contre lui aucun motif légal. Toutefois on m'assure que M. le Ministre, réduisant la nomination faite par le Bureau, en vertu d'une loi, aux proportions d'une simple candidature, aurait invité le Bureau à procéder à une autre désignation, sous le pré-

texte d'un refus du candidat à remplir une obligation prescrite par la loi. Quelle est cette loi dont parle M. le Ministre? Ce n'est assurément pas celle qui a créé et organisé le Bureau des Longitudes. Elle dit formellement et sans condition : le Bureau nomme aux places vacantes dans son sein. Ce n'est pas non plus la loi transitoire, en vertu de laquelle ont pu être destitués, en 1830, tel ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, tel professeur de l'École Polytechnique ou de la Faculté des Sciences que je connais parfaitement. L'effet de cette loi transitoire devait cesser et a cessé en réalité au bout de quelques mois.

» J'ai bien entendu dire, il est vrai, que, pour diverses nominations faites postérieurement à la mienne, le Ministre avait songé à faire revivre une formalité tombée depuis longtemps en désuétude, afin de pouvoir, disait-on, me l'opposer comme un précédent. Mais il paraît que l'anachronisme de ce précédent, qui devait être rétroactif, aura semblé tellement singulier, qu'on a renoncé à en faire usage, car on annonce, depuis quatre ans, que le Ministre doit m'écrire, et, depuis quatre ans, sa lettre n'est point parvenue jusqu'à moi. C'est un point sur lequel je désire que se porte particulièrement l'attention de Messieurs les Membres du Bureau, car il serait trop extraordinaire que les Membres du Bureau des Longitudes, nommés en vertu d'une loi, pussent être déclarés suspects par un Ministre et frappés arbitrairement pour des réponses présumées à des lettres qu'on ne leur a point écrites. Aurait-on promulgué, depuis ma nomination, quelque loi nouvelle et spécialement relative au Bureau des Longitudes? Quoique la géométrie et l'astronomie aient peu de rapport avec la politique, je ne crois pourtant pas être tellement étranger à ce qui se passe en ce

monde que, si une pareille loi eût été faite, je n'en eusse au moins entendu parler. La chose, Monsieur le Président, doit paraître assez grave à M. le Ministre lui-même pour l'engager à réfléchir mûrement sur cette affaire, et je vais en dire la raison.

» Si j'ai regardé ma nomination au Bureau des Longitudes comme l'encouragement le plus flatteur que je pusse recevoir dans les dernières années d'une vie consacrée tout entière à la science, je n'ai pourtant pas été surpris de me voir si favorablement accueilli par MM. les Membres du Bureau des Longitudes. J'étais depuis longtemps accoutumé à leur bienveillance. On sait quelle était celle que les anciens Membres du Bureau des Longitudes, MM. Lagrange, Laplace et Delambre, avaient pour moi, il y a plus de trente années, et en quels termes honorables M. Delambre, dès cette époque, voulait bien, dans l'exposé des travaux de l'Académie des Sciences, rendre compte de la démonstration des théorèmes d'Euclide et de Fermat. M. le Ministre peut ignorer ces faits, mais s'il vient à les connaître, peut-être ne serait-il pas tenté de porter atteinte aux prérogatives du Bureau des Longitudes; peut-être ne serait-il pas tenté de démentir les Lagrange, les Laplace, les Delambre, ni leurs illustres successeurs, au moment même où des lois, proposées par lui (lois sur la réimpression des *Œuvres* de Laplace et de Fermat), doivent porter à croire qu'il attache pourtant quelque importance aux théorèmes et à l'opinion des géomètres des siècles passés.

» Si M. le Ministre tient à m'exclure du Bureau des Longitudes pour le seul motif de mon attachement à un Prince que je respecte, que j'aime et que j'aimerai toute ma vie, il peut, au droit que le Bureau des Longitudes tient de la loi elle-même, opposer sa volonté ministé-

rielle; mais qu'il ait alors le courage de le dire, quoique, sous un gouvernement où l'on parle tant de liberté, il n'ait pas, ce semble, le droit de le faire. Si le bon droit, appuyé sur une loi formelle, venait à succomber dans cette lutte, je saurais tout supporter. Père de famille, successivement expulsé de toutes les positions où mes confrères, les Membres de l'Institut, avaient cru que je pouvais être utile aux amis des sciences et à ma patrie, dépouillé du fruit de quarante années de travaux scientifiques, je ne me plaindrais pas. Je garderais, avec la paix d'une bonne conscience, la double consolation d'avoir acquis par les suffrages de mes confrères un titre que je me ferai toujours gloire de porter, et d'avoir tenu, dans des temps difficiles, une conduite qu'honoreront tous les partis.

» Veuillez je vous prie, Monsieur le Président, donner communication de cette lettre à mes honorables confrères du Bureau des Longitudes, et agréer l'assurance de ma considération distinguée.

» A.-L. CAUCHY.

» Ce 4 décembre 1843. »

En publiant cette lettre, le savant remplissait en effet un devoir envers lui-même et à l'égard des Membres du Bureau des Longitudes qui l'avaient honoré de leurs suffrages, mais, du reste, elle eut le sort de toutes les protestations, elle ne changea rien à un parti pris.

Cauchy semblait donc plus que jamais rejeté dans la retraite et éloigné de toute position officielle; cependant de nouveaux événements se préparaient et allaient changer encore une fois le cours de sa carrière. En février 1848, le canon recommençait à gronder dans les rues de Paris; une insurrection formidable restait mai-

tresse de la capitale et détrônait le roi Louis-Philippe. La nouvelle révolution, considérée au point de vue social, était bien autrement radicale que celle qui avait renversé Charles X. En 1830, il est vrai, un trône s'écroulait et tout semblait remis en question; mais les partis se trouvant préparés dès longtemps pour de telles éventualités, on eut bientôt pourvu à l'organisation du nouveau pouvoir ; une dynastie succédait à une dynastie, un trône remplaçait un trône. En 1848, au contraire, tout pouvoir régulier disparaissait; les auteurs de la révolution, surpris eux-mêmes de leur succès, ne savaient quel parti prendre. Ils avaient cru simplement changer un ministère, et ils renversaient une dynastie; ils voulaient une émeute, et ils avaient déchaîné une révolution ; victimes de leur imprévoyance, ils demeuraient ensevelis dans leur propre triomphe, laissant le pays exposé à d'immenses périls.

Il y avait là de quoi effrayer les esprits les plus fermes et troubler les hommes les plus optimistes. Cauchy fut du nombre de ceux qui augurèrent mieux de l'avenir. D'ailleurs les événements de 1848 ne lui inspiraient pas les mêmes craintes que ceux de 1830. Ce qui l'avait le plus contristé dans la révolution de 1830, c'était le danger que la religion semblait y courir. Il avait vu les prêtres persécutés, les églises dévastées, l'archevêché de Paris saccagé et le prélat échappant avec peine au massacre par la fuite; maintenant, au contraire, un retour manifeste se produisait en faveur de la religion, et tout faisait espérer qu'après l'effervescence inséparable d'une révolution, il s'établirait un ordre de chose meilleur.

L'une des premières mesures du gouvernement provisoire eut pour objet de supprimer le serment politique. Une expérience constante a démontré que les serments

de cet ordre ne retiennent le bras d'aucun conspirateur, ne préviennent aucune révolution et ne servent souvent qu'à avilir les caractères et à fausser la conscience publique. Désormais, chaque citoyen serait appelé à servir son pays sans être assujetti à d'autre condition que d'observer les lois établies. Une chaire était vacante à la Sorbonne; Cauchy fut aussitôt désigné pour la remplir, et il put ainsi reprendre, au milieu d'un auditoire d'élite, son enseignement depuis longtemps interrompu.

Les événements de 1852 et l'établissement du second Empire faillirent un moment compromettre de nouveau sa position. Le serment politique fut rétabli, et le savant se trouva, une fois de plus, mis en demeure de se prononcer. Il refusa sans hésiter, et l'on vit bien alors que chez lui le refus n'était pas un simple caprice fondé sur des répugnances personnelles, mais qu'il avait ses racines dans la conscience et dans un sentiment profond de la règle et du devoir.

Son dévouement, toutefois, ne devait pas avoir à souffrir de cette dernière épreuve. Le Souverain auquel la France venait de confier ses destinées comprit toute la noblesse d'une pareille conduite. Il se montra généreux, et, tout en rétablissant l'obligation du serment, il résolut d'en dispenser quelques hommes à qui il était moralement impossible de le demander. Deux exceptions célèbres furent faites dans le monde savant, l'une pour Arago et l'autre pour Cauchy ; elles honorent également le Souverain qui les accorda et les savants qui en furent l'objet. Sans bruit, sans éclat, sans lui imposer même l'occasion d'un remercîment, on fit savoir un jour à Cauchy qu'il pourrait, quand il le voudrait, reprendre tout simplement le cours de ses leçons, comme si elles n'eussent jamais été interrompues. Le savant ne put rester insen-

sible à ce procédé plein de délicatesse et de bon goût. Demeurer en possession de *sa chaire*, respecté dans ses convictions et libre de tout engagement politique, avait été constamment l'objet de ses vœux. Il voyait cette noble ambition satisfaite, et il se livrait avec bonheur à la pensée de retrouver à la Sorbonne ses chers élèves, dont il ne devait plus désormais être séparé que par la mort.

CHAPITRE VIII.

AFFAIRE DES JÉSUITES.

Rien n'effacera jamais de mon cœur la mémoire du Pere Porée. Jamais homme ne rendit l'étude et la vertu plus aimables. VOLTAIRE.

État de l'opinion en ce qui concerne les Jésuites. — Question de l'enseignement. — Cauchy prend la défense des Jésuites et écrit en leur faveur. — « Considérations sur les ordres religieux. » — « Appel aux deux Chambres. » — Analyse de ces deux Mémoires.

La droiture du cœur, l'indépendance de l'esprit et le culte de l'amitié ont toujours brillé parmi les traits principaux du caractère de Cauchy. Nous en avons déjà cité des preuves nombreuses, et il nous faut maintenant parler d'une nouvelle circonstance où ces nobles qualités se manifestèrent avec éclat : sa conduite dans l'affaire des Jésuites lui fait trop d'honneur pour n'en pas parler avec quelques détails, en reprenant les choses de plus haut.

On n'a pas oublié les attaques dont les Membres de la célèbre Compagnie furent l'objet pendant les dernières années du règne de Louis-Philippe. Des tracasseries isolées, des récriminations ardentes avaient donné le signal, puis, quand l'orage éclata, ce fut une ligue générale. On vit paraître coup sur coup des pamphlets provocateurs, des romans perfides, dont le succès fut prodigieux. La lutte continua ensuite dans les chaires de l'enseigne-

ment public, à la tribune des Chambres, et enfin dans la presse. Les hommes d'État furent mis en demeure de sévir, et de supprimer une association religieuse qui menaçait, disait-on, l'ordre public et la société tout entière. Ainsi surexcitée, l'opinion publique était devenue tellement hostile aux Jésuites, que leurs meilleurs amis désespéraient de les sauver. Cauchy fut un de leurs plus chauds défenseurs. Au moment même où la lutte était engagée avec le plus de violence, une voix se fit entendre, un écrit parut, et quel ne fut pas l'étonnement d'un certain monde en apprenant que cette voix partait de l'Institut, que cet écrit était signé d'un des plus grands noms de la science! Mais, précisément à cause de son éclat, la démarche de Cauchy fut du nombre de celles qui contribuèrent davantage à ramener une foule d'esprits à des sentiments plus modérés et plus équitables.

Que reprochait-on aux Jésuites, et que faut-il penser de ces complots imaginaires, de ces fables ridicules, auxquelles la crédulité publique prêtait un complaisant écho? Évidemment ce n'étaient là que des prétextes : ce qui se trouvait au fond de toutes ces attaques, comme il fut bientôt facile de s'en convaincre, c'était la question délicate et brûlante de l'enseignement.

L'éducation de la jeunesse constitue une partie essentielle de la tâche que les Jésuites se sont imposée. On se rappelle avec quel succès ils s'en étaient acquittés sous l'ancien régime; malgré la réputation si justement méritée de l'Oratoire et de l'ancienne Université, leurs écoles n'avaient pas cessé d'être les plus fréquentées et les plus aimées de la jeunesse studieuse. Il suffira de rappeler le témoignage d'un homme qui, assurément, ne saurait être suspect, d'un écrivain dont on doit condamner certaines doctrines détestables, mais qui n'en demeure

pas moins l'un des esprits les plus brillants que la France ait produits. Voltaire avait été l'élève des Jésuites, et il conserva toujours de leurs leçons un souvenir reconnaissant. « Rien, dit-il, n'effacera jamais de mon cœur la mémoire du Père Porée, qui est également chère à tous ceux qui ont étudié sous lui. Jamais homme ne rendit l'étude et la vertu plus aimables. Les heures de ses leçons étaient pour moi des heures délicieuses, et j'aurais voulu qu'il fût établi, dans Paris comme à Athènes, qu'on pût, à tout âge, assister à de telles leçons. Je serais revenu souvent les entendre. »

Les écoles des Jésuites disparurent à l'époque de la suppression de l'Ordre, en 1772; après la Révolution, d'autres établissements s'élevèrent sur leurs ruines. Enfin, en 1808, Napoléon créa l'Université de France, dont le caractère sembla se définir tout d'abord par le nom de son premier grand maître, Fontanes, comme celui de l'ancienne Université peut se résumer dans le souvenir de Rollin, l'un de ses derniers recteurs. Il ne m'appartiendrait pas de célébrer ici cette grande institution, qui est une des gloires de notre pays; mon témoignage pourrait paraître suspect de partialité, mais je ne ferai que répéter ce qui est avoué par tout le monde, en disant que cette création était nécessaire, et qu'à une époque nouvelle il fallait un ordre de choses nouveau. Vouloir que dans notre siècle l'éducation de la jeunesse fût remise presque exclusivement aux mains d'un ordre religieux, eût été une faute, et c'est en grande partie pour avoir tenté de poursuivre ce but que le gouvernement de la Restauration a soulevé tant d'inimitiés. L'État ne pouvait pas, après tout, abandonner au premier venu la charge importante de l'enseignement; c'était donc un devoir pour lui d'y pourvoir en organisant les écoles de

l'Université. Il serait d'ailleurs souverainement injuste de méconnaître tout ce qu'il y a chez les Membres du corps enseignant, non-seulement de science et de talent, mais encore de dévouement à la jeunesse et d'abnégation personnelle dans l'accomplissement de leur tâche laborieuse.

Mais, enfin, cette science et ce dévouement ne devaient pas constituer un privilége exclusif; à moins de renoncer aux principes les plus élémentaires du droit et de la liberté, il convenait de laisser les parents maîtres de choisir eux-mêmes les précepteurs de leurs enfants. Or, il faut bien le reconnaître, depuis que les Jésuites avaient rouvert des écoles à leurs risques et périls, un nombre toujours croissant de familles y envoyaient leurs fils. Qu'y avait-il à faire, en pareille circonstance, de la part des établissements de l'État, si ce n'est de redoubler de zèle et de s'appliquer à vaincre le bien par le bien?

Ce qui rattachait Cauchy à la cause des Jésuites, c'était précisément leurs traditions, si conformes à ses propres vues, pour ramener les esprits à la religion et à la science; c'était leur aptitude à christianiser l'enseignement et à s'emparer de l'âme et du cœur des jeunes gens, en leur offrant l'avantage incontestable d'une éducation perfectionnée. D'ailleurs, des liens d'ancienne amitié l'unissaient à un grand nombre des révérends Pères : plusieurs d'entre eux étaient les confidents habituels de ses pensées et les soutiens des œuvres charitables qu'il avait organisées; de là entre le savant et les religieux des relations pleines d'intimité et d'abandon. Il portait un attachement tout particulier au Père de Ravignan, le célèbre prédicateur de Notre-Dame, qui, de son côté, lui témoignait la plus vive affection. Une anecdote piquante mon-

trera bien la nature de ces aimables relations et fera ressortir à la fois la simplicité du savant et la modestie du religieux. « Le Père de Ravignan, raconte son historien, le Père de Pontlevoy, avait fait allusion en chaire à je ne sais quelle démonstration mathématique, et quelques inexactitudes lui étaient échappées. Le sermon à peine fini, M. Cauchy accourt, et, du plus loin qu'il aperçoit le prédicateur, il lui crie : Ah ! de grâce, mon Père, vous qui savez tant de choses et qui les dites si bien, ne parlez jamais de ce que vous ne savez pas. Et plusieurs fois dans le cours de l'entretien, le fatal compliment fut répété, tant étaient vives les préoccupations scientifiques du savant et l'ardeur de son zèle pour l'honneur de la chaire. Le Père de Ravignan rit beaucoup de l'aventure, et lui promit bien de ne jamais se hasarder sur ce terrain scabreux sans le consulter au préalable. »

On comprendra maintenant pourquoi Cauchy ressentit plus vivement que personne les coups qui frappaient les Jésuites, et comment il fut conduit, pour prendre leur défense, à mettre à profit l'autorité morale que lui donnaient sa position de Membre de l'Institut, sa réputation de savant et son caractère bien connu d'indépendance. Deux publications remarquables furent le résultat de sa détermination courageuse. La principale est intitulée : *Considérations sur les ordres religieux, adressées aux amis des sciences*. Elle commence par un avertissement, où l'auteur explique les motifs de sa démarche. « Ceux qui ne liront pas cet ouvrage, dit-il, s'étonneront peut-être de ce que je l'ai écrit et publié. Mais en France, où l'on aime la loyauté, où l'on apprécie le courage, tout étonnement cessera pour ceux qui, ayant pris la peine de me lire, pèseront les motifs de ma détermination. Catholique, je ne puis rester indifférent aux intérêts de

la religion; Géomètre, je ne puis rester indifférent aux intérêts de la science. Catholique, je ne puis croire que la société ait un intérêt quelconque à proscrire précisément celui de tous les états que l'Évangile considère comme le plus parfait, en sorte que la perfection évangélique devienne, dans le royaume très-chrétien, non un titre d'honneur, mais un titre d'ignominie. Académicien et Géomètre, je ne puis voir avec indifférence des préventions sans fondement, opposées aux savants modestes et laborieux qui ont enrichi la science de tant de précieuses découvertes, à ceux-là même dont les travaux sont encore chaque jour approuvés, couronnés par nos Académies. » D'ailleurs, parmi les religieux qu'il défend, l'auteur compte des disciples; « ne pas les défendre lorsqu'on les attaque, ce serait trahir les devoirs d'un père qui, dans un pressant danger, refuserait aide et assistance à des fils dont les talents et les vertus ne peuvent être pour lui que le sujet d'un noble orgueil. » Sans doute le jour de la justice n'est pas éloigné, mais il ne faut pas « attendre pour entrer dans la lice le moment où la France entière, étant lasse des persécutions et des proscriptions dirigées contre la vertu, l'éloquence et le génie, il n'y aura plus aucun courage à dire la vérité. »

Après ce préambule, Cauchy aborde l'objet même de la question, qu'il traite avec une logique serrée et une véritable éloquence. « L'homme, dit-il, n'est pas seulement un morceau de matière que l'on peut voir et toucher, il est encore une intelligence. Esprit et corps à la fois, il a des besoins de natures diverses qu'il importe de satisfaire. » Dans notre société il y a des enfants pauvres à instruire, des indigents à soulager, des infirmes à servir et à soigner, des prisonniers à consoler, des criminels à

ramener au bien. Mais où trouver le remède à ces maux, si ce n'est dans l'esprit de sacrifice, et de sacrifice chrétien, tel qu'il est compris et pratiqué dans les associations religieuses, où le sacrifice, accepté pour toute la vie, est accompli sans restriction dans toute la perfection évangélique?

« Voyez cette jeune fille, dont la beauté toute céleste n'est pour ainsi dire que le rayonnement d'une belle âme. Quelle innocence, quelle candeur virginale brille dans ses traits! Comme elle est tendrement aimée d'un père, d'une mère, dont elle a fait dès son enfance la joie et le bonheur! Elle est née peut-être au sein de l'opulence et dans un rang élevé. Il ne tiendrait qu'à elle d'unir son sort au sort du riche héritier d'un nom vénéré dans sa patrie, et vous félicitez déjà l'heureux mortel qui pourra se flatter de posséder un si rare trésor. Détrompez-vous. Elle est dévorée d'une ambition que vous aurez peine à comprendre. Son ambition, à elle, c'est d'aller dans les campagnes instruire les filles du pauvre laboureur. Son ambition, c'est de recueillir dans nos villes l'enfant qui n'a plus de mère, c'est d'aller dans nos hôpitaux servir les malades et panser leurs plaies. Sans craindre ni la famine, ni la peste, ni la guerre, elle volera partout où se présenteront des infortunes à secourir; et, toujours prête à leur sacrifier sa propre vie, elle affrontera tous les périls; elle ira, s'il le faut, jusqu'aux extrémités du monde pour calmer la souffrance ou consoler la douleur. Je viens de peindre la sœur de charité. »

Mais quels sont « ces petits enfants qui se groupent avec amour autour d'un religieux dont le costume sévère ne les effraye pas? Que viennent-ils faire dans cette vaste salle dont l'enceinte est encore trop étroite pour eux?

Ces haillons qui les couvrent, cette robe grossière dont est revêtu leur humble et modeste précepteur, ces murailles nues, tout vous présente l'image de l'indigence. Rien ne paraît digne de fixer vos regards. C'est ici néanmoins que s'opère une des plus étonnantes merveilles. Ici la plus haute sagesse est enseignée avec succès au fils du pauvre artisan. Instruit par un bon frère, l'enfant se trouvera initié aux mystères les plus sublimes, aux secrets d'une philosophie bien supérieure à celle des plus illustres philosophes.

» Mais écoutez encore ; voici des hommes qui ont rendu à la société les services les plus éclatants. Êtes-vous ami de la civilisation et du progrès? Ces hommes sont allés, dans des régions lointaines, chercher, non des peuples policés, mais des sauvages égarés parmi de profondes forêts; des sauvages plus féroces que les lions et les tigres, des sauvages dont la nourriture favorite était la chair et le sang de leurs semblables. Ils ont dompté ces êtres farouches, et ils sont parvenus à réaliser avec eux cet âge d'or rêvé par les poëtes, à donner aux nations civilisées l'exemple des vertus les plus pures, à transporter sur la terre une vive image du bonheur des cieux.

» Les missions du Paraguay ont prospéré pendant plus de deux cents ans, et les hommes les plus hostiles d'ailleurs à la religion n'ont pu s'empêcher de payer un juste tribut d'éloges à leurs pieux fondateurs. L'astronome Lalande disait en parlant de la civilisation apportée par les missionnaires aux sauvages de l'Amérique : « Deux » ministres ont détruit sans retour le plus bel ouvrage » des hommes, celui dont aucun établissement sublunaire » n'approchera jamais, l'objet éternel de mon admira- » tion, de ma reconnaissance et de mes regrets. »

» Un de ces missionnaires ira le premier dans l'extrême Orient, et là, un crucifix à la main, « il aura le bonheur » de convertir cinquante-deux royaumes, d'arborer l'éten- » dard de la croix sur une étendue de trois mille lieues, » de baptiser de sa propre main un million de mahomé- » tans et d'idolâtres ; et tout cela en dix ans. »

» Vous êtes sans doute l'ami des sciences, vous estimez la littérature, vous vous intéressez à la saine philosophie et au progrès des lumières ? Eh bien ! ces mêmes hommes ont produit une foule d'ouvrages devenus classiques en littérature, en morale et en philosophie ; des traités savants sur les origines des langues, les mœurs et les institutions des divers peuples ; des découvertes utiles dans les sciences, la médecine et les arts. On compte parmi eux des docteurs éminents, des orateurs illustres. Ils ont donné à la jeunesse les instituteurs les plus instruits et les plus dévoués : Leibnitz, Vincent de Paul, Henri IV, Bossuet, Fénélon, les considéraient comme les maîtres les plus sages, les plus expérimentés, les plus habiles. A leur école se sont formés les hommes les plus illustres dans tous les rangs de la société. Les uns, tout en rejetant la foi de leurs maîtres et en devenant les ennemis de la religion, leur ont conservé cependant toute leur amitié et leur reconnaissance ; les autres, demeurés fidèles à leurs préceptes, ont donné au monde des exemples éclatants de génie et de vertu. Grâce à leur sage direction, on a vu avec admiration des guerriers, des magistrats, des savants, des académiciens dont les noms sont dans toutes les bouches, donner à la pratique des vertus les plus sublimes un temps précieux, consacrer leurs soirées et les heures que les heureux du siècle passent dans les plaisirs, soit à visiter les prisons et les maisons de refuge des jeunes condamnés, soit à instruire les enfants des pauvres

Savoyards; fidèles en cela à une noble résolution que ces maîtres vénérés leur avaient inspirée. Eh bien! ces hommes admirables, ces sages législateurs du Paraguay, ces intrépides conquérants de la Chine et du Japon, ces savants, ces philosophes, ces orateurs, si humbles et si élevés tout à la fois, qui, aux dons de l'éloquence, du génie et d'un invincible courage, joignent la modestie la plus touchante et une douceur inaltérable; ces maîtres habiles, si tendrement aimés de leurs disciples, ce sont les disciples du grand Ignace, ce sont les Pères de la Compagnie de Jésus.

» Et maintenant, comment serait-il possible de condamner ces hommes et de les poursuivre comme de vils malfaiteurs? Sans doute, vous ne considérez pas comme des ennemis de la civilisation et des lumières, ceux-là même qui ont éclairé et civilisé tant de peuples divers. Vous ne considérez pas comme ennemis des talents et du génie ces habiles instituteurs dont Grotius et Henri IV ont dit qu'ils surpassaient tous les autres par la science et la vertu; ces maîtres éminents qui ont eu pour élèves Corneille, Bossuet, Molière, Montesquieu et tant d'autres. Vous ne considérez pas comme ennemis des gloires de la patrie ceux dont les leçons ont formé les Condé, les Villars, les Molé, les Lamoignon, les Belzunce. Vous ne considérez pas comme ennemis des sciences les instituteurs des Descartes, des Cassini, des Tournefort; ceux dont les travaux ont été souvent cités avec honneur par les Laplace, les Lagrange, les Delambre; ceux qui, de nos jours encore, ont eu pour admirateurs et pour amis les Ampère, les Freycinet, les Coriolis. Vous n'exigerez pas sans doute qu'en réimprimant les *Œuvres* de Laplace, on y raye les noms des Gaubil et des Boscowich; vous n'exigerez pas qu'on bannisse des programmes du Collége de

France, de la Sorbonne et de l'École Polytechnique, ni la diffraction découverte par le Jésuite Grimaldi, ni le théorème du Jésuite Guldin, ni les découvertes du Jésuite Riccati, auquel, pour prix des services qu'il avait rendus à l'Italie, la république de Venise décerna une médaille d'or. Vous ne leur ferez pas un crime d'avoir découvert les aérostats, d'avoir propagé l'emploi du quinquina, si connu sous le nom de *poudre des Jésuites*, ni d'avoir écrit ce traité savant qui, sous le nom de *livre du Jésuite*, était devenu le manuel de la marine anglaise. Sans doute vous ne considérez pas comme ennemi de la saine morale un Institut qui fut si cher à François de Sales et à Vincent de Paul, et vous vous plaisez à reconnaître la vertu, la science et la sainteté d'un ordre qui a produit les Lainez, les Suarez et les Bourdaloue. Vous êtes bien éloigné de regarder comme une histoire sérieuse le roman des *Provinciales*. Vous n'épousez pas les fureurs d'une Pompadour, de cette femme qui, sur la foi de Pascal, avait cru trouver dans la célèbre Compagnie des casuistes accommodants, et qui s'étonnait qu'un Jésuite eût l'insolence de ne pas sanctionner, comme parfaitement conforme à la plus pure morale de l'Évangile, ce que les grands philosophes de l'époque se gardaient bien de censurer.

» Mais si les Jésuites ne sont atteints et convaincus que d'avoir travaillé *pour la plus grande gloire de Dieu*, d'avoir aimé les hommes dans la vue de plaire à Dieu et de s'être sacrifiés pour eux avec joie; d'avoir rendu par leurs travaux d'éminents services à la religion, à la philosophie, à la littérature, aux sciences et aux arts; enfin d'avoir toujours été considérés comme les maîtres les plus propres à former, tout à la fois, l'esprit et le cœur des élèves qui leur étaient confiés; comment expliquer tant de préventions hostiles et incompréhensibles? Pourquoi

ne pas rendre justice aux Jésuites comme à d'autres? Pourquoi seraient-ils moins estimés de nous que de nos voisins, plus maltraités par une nation polie que par les sauvages du Paraguay? »

Telle est en substance l'argumentation vigoureuse et rapide par laquelle Cauchy pressait ses adversaires et s'efforçait de prévenir l'accomplissement d'une grande iniquité. Il ne crut pas, du reste, devoir se borner à invoquer le bon sens du public, il remonta plus haut et fit un appel au Gouvernement lui-même dans une autre publication intitulée : *Mémoire à consulter, adressé aux Membres des deux Chambres.*

Ce second travail n'est pas moins éloquent ni moins logique que le précédent. Outre les motifs déjà exposés, il renferme des arguments qui étaient plus particulièrement de nature à faire réfléchir les hommes d'État. Dans ce nouveau plaidoyer, Cauchy invoque surtout les grands principes inscrits dans la Constitution. « Quoi donc! vous avez proclamé bien haut la liberté de conscience, la liberté des cultes, la liberté d'enseignement, et vous proscrivez des citoyens français qui font profession de se consacrer à l'exercice des vertus chrétiennes. La loi, qui ne veut pas les reconnaître pour les protéger, les reconnaîtra pour les persécuter, pour torturer leur conscience! Bien plus, on les forcera eux-mêmes d'être les exécuteurs de la sentence portée contre eux. Le projet de loi obligera des citoyens à se déclarer coupables de perfection évangélique, afin de châtier ce nouveau crime que Justinien, dans son code, avait oublié de signaler! Et l'on proposera sérieusement à des législateurs d'adopter une mesure si étrange!

» Vous ne demandez pas à un homme qui veut se consacrer à l'instruction publique s'il est ou s'il n'est pas

disciple de Wichnou, du grand Lama, de Mahomet; vous ne lui demandez même pas s'il croit ou s'il ne croit pas en Dieu. Mais vous lui demanderez s'il est ou s'il n'est pas disciple de saint Dominique ou de saint Ignace, et s'il a le malheur de pratiquer, non-seulement les préceptes, mais encore les conseils de l'Évangile; s'il a le malheur de s'appeler Bourdaloue, Porée, Lacordaire ou Ravignan, il faudra qu'on le montre au doigt comme un homme que la loi met en suspicion, qu'elle déclare incapable de rien apprendre à la jeunesse; il faudra qu'il subisse l'ignominie de se voir diffamer à la face de la France, dont il est la gloire, par la voix de ses législateurs.

» Quels arguments avouables peut-on invoquer contre eux? Les Académies vous répondent de leur science. Quant à leur charité, à leur sainteté, vous ne la niez pas. Que dire de leur éloquence? Un orateur, que jadis la magistrature a compté dans ses rangs avec orgueil, un de ces apôtres de l'Évangile qui seront éternellement chers à la France, et dont le nom sera béni longtemps encore après que chacun de nous aura été rendre compte à Dieu de ses œuvres, a le bonheur d'arracher un grand nombre d'hommes aux ténèbres dans lesquelles une trompeuse philosophie les avait plongés. Il fait briller à leurs regards les doux rayons du soleil de la vérité. Vos écrivains les plus illustres, vos députés, vos généraux, vos magistrats, vos préfets, vos femmes et vos filles ne connaissent pas de plus grand bonheur que d'aller à Notre-Dame, apprendre de lui tous les secrets des sciences divines, d'être initiés par lui-même à la pratique de tous les devoirs et des plus héroïques vertus. Et ce sont de tels hommes que vous voudriez condamner? »

Pendant que Cauchy plaidait ainsi la cause des Jésuites, des orateurs éloquents les défendaient du haut de la tri-

bune; M. Berryer à la Chambre des députés, M. de Montalembert à la Chambre des pairs; d'un autre côté, M. de Vatisménil mettait à leur service son rare talent de jurisconsulte; de toute part, enfin, des hommes, également recommandables par leur mérite, leur position et leur caractère, s'efforçaient de ramener l'opinion publique à des sentiments plus équitables. Leurs efforts réunis ne purent empêcher l'orage d'éclater. Faute d'accusations précises, on fut réduit à incriminer des tendances supposées, et l'on vit, comme aux premiers temps du Christianisme, des hommes poursuivis pour des crimes attachés à un nom. Cependant les démarches de Cauchy et des autres défenseurs des Jésuites ne furent pas inutiles; elles servirent du moins à amortir le coup qui devait les frapper et à préparer le retour des esprits. Après bien des hésitations, le Gouvernement s'arrêta à des moyens termes dont l'opinion publique dut se contenter, et qui laissaient aux religieux l'espoir d'un avenir meilleur. Il s'était d'abord agi d'une mesure radicale, d'une suppression absolue; en réalité, on se borna à fermer certains établissements, surtout ceux d'éducation, et à diminuer l'importance de quelques autres. Le Père de Ravignan dut quitter la rue des Postes, mais il lui fut permis de résider à Paris, et il put continuer dans la retraite la préparation de ses conférences de Notre-Dame. Trois ans plus tard, la révolution de 1848 inaugurait pour la Compagnie une ère plus favorable. Le nouvel ordre de choses ne lui promettait pas sans doute des sympathies bien vives, mais elle devait au moins y rencontrer la liberté et l'indépendance, ce trésor inestimable, si cher à tous les cœurs nobles et généreux.

CHAPITRE IX.

TRAVAUX SCIENTIFIQUES.

> Geometria, ante rerum ortum, . . . exempla Deo creandi mundi suppeditavit, et cum imagine Dei transivit in hominem.
>
> KÉPLER. *Livre de l'Harmonique.*

PREMIÈRE PARTIE.

Recherches sur les séries. — Des séries chez les anciens et chez les modernes. — Questions qui se rattachent à cette théorie. — Cauchy établit les conditions de leur emploi. — Laplace et la Mécanique céleste. — Théorie des imaginaires. — Leur application à l'étude des équations algébriques. — A l'étude des fonctions de tous les ordres. — Calcul des résidus. — Relations entre la science pure et la science appliquée. Travaux astronomiques. — M. Le Verrier et la planète Pallas. — Analyse et Géométrie. — Rapprochement entre Gauss et Cauchy.

Après avoir raconté les circonstances principales de la vie d'Augustin Cauchy, le moment est venu de faire connaître ses travaux scientifiques, et de caractériser au moins la nature et l'étendue de ses nombreuses découvertes, dont on trouvera le détail dans le second volume de cet ouvrage. Nous diviserons cette exposition en deux Parties : la première comprendra les recherches qui se rapportent plus particulièrement à l'analyse pure; la seconde aura pour objet celles qui concernent les sciences naturelles, telles que la mécanique moléculaire et la physique mathématique. Nous ne reviendrons pas, du reste, sur les Mémoires de Cauchy antérieurs à son entrée à l'Académie ; il en a été parlé précédemment.

La théorie des séries se présente d'abord comme la base et le point de départ de ses principaux travaux; c'est donc le premier sujet qu'il convient d'examiner.

La connaissance et l'usage des séries remonte très-loin dans l'histoire des sciences. Les géomètres de l'antiquité en faisaient un usage continuel dans leurs investigations, et, à vrai dire, le premier homme qui s'occupa de l'art de compter inventa la première série. La suite naturelle des nombres entiers n'est pas autre chose, en effet, qu'une série, et la théorie de la numération est une des questions les plus utiles et les plus délicates que les anciens calculateurs aient eu à traiter. Toutefois, pour rencontrer des applications d'un ordre plus élevé, il faut arriver jusqu'à Archimède; c'est à lui qu'on doit la sommation des progressions, l'étude des propriétés de la spirale, la mesure du segment parabolique, celle du volume de la pyramide, et encore la détermination du rapport de la circonférence au diamètre. L'importance de ces premiers résultats aurait dû montrer dès lors tout le profit qu'on pouvait tirer de l'étude de cette branche naissante de l'analyse, mais Archimède ne fut pas compris de ses contemporains et se vit même en butte à leurs contradictions. Les sophistes de son temps allèrent jusqu'à accuser ses méthodes de fausseté. Leurs principales objections portaient sur l'introduction de la notion de l'infini dans les raisonnements, et le singulier paradoxe d'Achille *aux pieds légers*, poursuivant une tortue sans pouvoir jamais l'atteindre, donne une idée des arguments peu judicieux qu'on lui opposait.

Toutefois des objections plus sérieuses, auxquelles on ne savait pas répondre avec assez de netteté, inquiétaient les savants et retardèrent pendant des siècles les progrès de l'analyse. C'est au XVIIe siècle seulement qu'on reprit

l'étude des séries, et on sera peut-être moins étonné de voir la science arrêtée par des difficultés mal fondées, lorsqu'on apprendra combien cette importante théorie fut peu comprise par la plupart des savants modernes. La division des polynômes conduit Viète aux séries récurrentes; en étudiant le calcul des différences finies, Stirling et Taylor découvrent la série bien connue en analyse sous le nom de *série de Taylor;* de leur côté, Bernoulli, Euler, Leibnitz, appliquent les séries à l'étude des fonctions transcendantes, et cependant aucun ne se préoccupe de définir les conditions auxquelles doivent satisfaire les formules dont ils font usage. Le plus souvent, il est vrai, les résultats de leurs calculs sont exacts, mais quelquefois aussi ils sont conduits à des conséquences erronées, et, lorsqu'ils rencontrent la vérité, c'est en quelque sorte par aventure et comme à leur insu. On peut donc dire que, jusqu'au commencement de ce siècle, la plus grande confusion régnait dans la théorie des séries. Cauchy entreprit le premier de remédier à ce désordre. Dans une science qui est le type des sciences exactes, il eut l'heureuse fortune de reconnaître et de combler, sous le rapport de l'exactitude, une lacune immense laissée par Newton, Leibnitz, Euler et Lagrange.

C'était rendre aux savants un service des plus signalés, car les développements en séries infinies se rencontrent à chaque instant dans les questions les plus importantes des mathématiques pures ou appliquées. Il n'y a qu'un très-petit nombre de problèmes qu'on sache résoudre au moyen des formules élémentaires de l'analyse, en se bornant par exemple aux fonctions algébriques ou circulaires; tous les autres conduisent à des fonctions d'un ordre plus élevé, qu'il n'est pas possible, du moins dans l'état de la science, d'étudier sous leur forme synthétique

et complète. On est alors obligé de recourir à des développements en série, et, par ce moyen, on obtient une foule de résultats utiles.

Souvent aussi il arrive qu'une question se compose de divers éléments dont l'importance est très-inégale; on la résout alors par des approximations successives, en tenant compte progressivement de ses divers éléments suivant leur ordre de grandeur. Dans une première approximation, on se contentera des éléments essentiels; on corrigera ensuite les résultats obtenus en se servant des éléments du second ordre, et l'on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait atteint le degré d'exactitude nécessaire. Cette méthode conduit à une suite de calculs qui se développent d'après des procédés réguliers et uniformes, dont l'ensemble se rattache encore à la théorie des séries.

Mais, parmi toutes les branches des sciences mathématiques, il n'en est peut être pas où l'on fasse un emploi plus constant de ces formules que dans l'astronomie. Le problème des mouvements célestes se présente au premier abord comme étant des plus faciles. Les lois de ces mouvements ont été, depuis longtemps déjà, assignées par Képler et Newton, et il semble que ces lois simples et élémentaires doivent donner immédiatement la solution de toutes les questions astronomiques. Toutefois, en examinant la chose de plus près, on rencontre bientôt des difficultés qui avaient échappé à un premier aperçu et qui, en s'accumulant, conduisent à des travaux immenses et à des calculs presque inextricables. Il suffit, pour en juger, de jeter un coup d'œil dans ces énormes volumes où des pages entières sont remplies par une seule formule, et où l'on trouve à chaque pas un étalage effrayant de chiffres et de notations algébriques. La raison en est cependant facile à comprendre. Si les planètes

étaient complétement indépendantes les unes des autres dans le ciel, on les verrait se mouvoir en suivant exactement les lois élémentaires, et chacune décrirait autour du soleil son orbite elliptique. Mais tous les corps célestes sont solidaires; ils sont unis entre eux par les liens invisibles mais très-réels de l'attraction universelle; on ne peut faire subir un changement à l'un d'eux sans que tous en ressentent immédiatement le contre-coup; de là des écarts, des *perturbations*, qui modifient à chaque instant le mouvement primitif, et dont le calcul est extrêmement compliqué quand on veut avoir égard à toutes les causes dont l'influence peut être sensible. Heureusement ces causes n'ont pas toutes la même importance; elles diminuent très-rapidement avec la masse et la distance. Dans une première approximation, on aura donc seulement égard à l'action des astres les plus gros et les plus rapprochés; mais, si l'on veut arriver à une grande exactitude, il faut ensuite tenir compte des influences secondaires, et c'est précisément là que surgissent les difficultés.

Une condition essentielle, à laquelle doivent satisfaire les séries dont on fait usage en ces diverses circonstances, c'est d'être convergentes, c'est-à-dire de se rapprocher de plus en plus d'une limite déterminée à mesure qu'on prend un nombre de termes de plus en plus grand. On appelle, au contraire, séries divergentes celles dont les termes, en s'accumulant, donnent des sommes indéfiniment croissantes. Il en est en quelque sorte des séries comme de ces verres d'optique qui, tantôt réunissent les rayons lumineux en un foyer commun, et tantôt les dispersent en faisceaux divergents. Les séries convergentes, seules, peuvent être appliquées avec sûreté dans les calculs. Ce n'est pas que les séries divergentes ne puissent

être utilisées, mais seulement dans des conditions toutes spéciales, et, si l'on s'en servait sans précaution, on tomberait dans des erreurs grossières.

Avant Cauchy cependant, personne ne s'inquiétait de cette question essentielle, et l'on adoptait avec une confiance aveugle les résultats vrais ou faux de théories incertaines. Il apprit le premier la nécessité de reconnaître, avant toutes choses, la convergence des séries, il signala les fautes graves auxquelles on s'exposait par cet oubli, et s'occupa de fonder cette partie de l'analyse sur des bases solides et inattaquables. Tel est l'objet de divers Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, vers 1820. Ces recherches frappèrent vivement les savants, et leur inspirèrent de véritables alarmes sur ceux de leurs travaux où il était fait usage des séries. Le grand ouvrage de la *Mécanique céleste*, que Laplace venait de terminer récemment, reposait presque en entier sur des développements de ce genre; contester la légitimité de leur emploi et convaincre quelques-uns d'erreur, c'était ébranler par la base tous les travaux du savant géomètre et remettre en question toutes ses découvertes. Laplace eut donc un moment d'effroi. On raconte qu'au sortir de la séance où Cauchy avait exposé ses premières recherches, il rentra précipitamment chez lui et n'en sortit pas avant d'avoir vérifié la convergence de ses formules. A la vérité, son génie l'avait bien inspiré, car son ouvrage était irréprochable et sortait victorieux de l'épreuve, mais une défaite était possible et tenait en définitive à peu de chose. Que l'orbite de la terre, par exemple, au lieu d'être sensiblement circulaire, eût affecté une forme un peu plus allongée, et tout l'édifice de la *Mécanique céleste* tombait en ruines.

Parmi les plus belles recherches de Cauchy, il faut

compter aussi celles qu'il entreprit au sujet de la théorie des quantités imaginaires. Cette théorie est la plus extraordinaire et en même temps la plus féconde de l'analyse. Ici le savant n'opère plus, ni sur des nombres, ni sur des quantités géométriques, ni même sur des quantités algébriques de valeur arbitraire, mais uniquement sur des signes et de purs symboles. Les expressions imaginaires en effet, auxquelles on donne quelquefois improprement le nom de quantités, ne sont autre chose que des symboles abstraits, n'ayant absolument aucun sens par eux-mêmes; et cependant, en les combinant suivant des lois déterminées, en les soumettant à une sorte d'analyse mécanique, on déduit, pour les quantités réelles elles-mêmes, des résultats d'une grande importance, qu'on chercherait vainement à démontrer de toute autre manière.

Si en littérature et en philosophie, ou dans toute autre partie des connaissances humaines, on raisonnait ainsi sur des fictions, ou si l'on essayait de tirer des conséquences de principes purement conventionnels, il est certain que les résultats obtenus inspireraient peu de confiance et qu'on ne s'arrêterait guère à des spéculations de cette nature; c'est pourtant ce que font constamment les géomètres dans l'analyse des symboles imaginaires, et le succès de leurs recherches a dépassé toute prévision. Il est juste d'ajouter que, dans les sciences mathématiques, on peut vérifier à chaque instant l'exactitude des formules obtenues, et que, si l'on n'avait pas cette ressource, on n'accepterait peut-être pas avec la même facilité les résultats d'une théorie qui semble au premier abord si téméraire. Avant Cauchy, la théorie des symboles imaginaires était pour ainsi dire dans l'enfance; c'est lui qui, le premier, introduisit dans cette branche

épineuse des sciences mathématiques une clarté et une rigueur auparavant inconnues. Entre ses mains, les symboles imaginaires se prêtent aux transformations les plus délicates et les plus variées, et deviennent le procédé de généralisation le plus puissant dont la science dispose.

A propos des imaginaires, il convient surtout de rappeler l'application qu'il en fit à l'analyse des équations algébriques. Citons, par exemple, le célèbre théorème, qu'on cherchait depuis si longtemps, sur l'existence, la nature et le nombre des racines des équations, et les diverses règles qu'il a posées pour déterminer le nombre des racines d'une équation entre des limites données, règles dont le théorème bien connu de Sturm n'est lui-même qu'un cas très-particulier. Ces découvertes excitèrent vivement l'attention et l'émulation des géomètres. Cauchy y était arrivé par des considérations d'un ordre très-élevé et peu accessibles à la plupart des hommes livrés à l'étude des mathématiques; il importait donc de donner aux démonstrations une forme simple et commode afin de les faire entrer dans les éléments de la science ; c'est ce qu'entreprirent bientôt avec succès MM. Sturm et Liouville dans un de leurs plus beaux Mémoires. De son côté, Cauchy, sur la simple annonce de leur travail et avant d'avoir connaissance de leur Mémoire, donna lui-même une démonstration élémentaire qui est un modèle d'élégance et de simplicité.

Cette même théorie des imaginaires lui doit encore un autre perfectionnement essentiel. Frappé de l'inconvénient de laisser à ces expressions une signification toute symbolique, il eut l'ingénieuse idée de leur attribuer une interprétation géométrique. A chaque expression imaginaire il fait correspondre un point dans un plan ; à me-

sure que les éléments varient, le point se déplace suivant une courbe, et il ne reste plus alors qu'à étudier les propriétés de la courbe décrite en appliquant les principes ordinaires de la géométrie analytique. En définitive, la question se trouve ramenée à l'étude du mouvement d'un point dans un plan. Ce mode de représentation, que le plus illustre géomètre de l'Allemagne, Gauss, avait découvert de son côté, est devenu aujourd'hui un procédé habituel et a servi de base à une foule de travaux de la part des savants les plus distingués.

Les recherches de Cauchy sur la généralité et la périodicité des Fonctions se rapportent encore au même genre d'étude. Elles se trouvent développées dans divers travaux, parmi lesquels on doit citer en première ligne le beau Mémoire *sur les Intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (1), que les hommes compétents considèrent, non-seulement comme le chef-d'œuvre du savant, mais encore comme une des plus admirables productions scientifiques de l'esprit humain. Malgré la nature tout à fait spéciale de ces recherches, je voudrais, à cause de leur importance exceptionnelle, essayer au moins d'en donner une idée; elles constituent certainement le plus beau titre de gloire de Cauchy, tant à cause de leur valeur propre qu'en raison de leur difficulté et des progrès merveilleux qu'elles ont réalisés dans l'analyse.

Rappelons d'abord un fait bien connu en mathématiques. Lorsqu'on étudie des fonctions d'une certaine espèce et qu'on les compare à leurs fonctions inverses, ces dernières se présentent ordinairement avec un caractère de généralité bien supérieur à celui des fonctions

(1) Publié en août 1825.

primitives. Ainsi, pour prendre un exemple simple, dans le cercle, un sinus est complétement déterminé par son arc; mais le retour du sinus à l'arc donne pour ce dernier une infinité de valeurs, de sorte que le sinus se présente alors sous la forme d'une fonction périodique qui repasse une infinité de fois par les mêmes valeurs quand l'arc croît indéfiniment. Les fonctions, dites *Elliptiques*, possèdent des propriétés tout à fait semblables, et, de plus, Abel a démontré, dès 1826, qu'elles jouissent d'une double périodicité, l'une réelle et l'autre imaginaire. Considérons encore les fonctions appelées *Intégrales*. Celles-ci se présentent naturellement dans le calcul de l'aire des courbes, et, dans ce cas, elles ont une signification réelle et bien déterminée. Mais cette signification est-elle la seule dont elles soient susceptibles? Après l'avoir cru longtemps, les géomètres ont bien dû reconnaître qu'ils s'étaient trompés et qu'ils n'avaient envisagé qu'une face très-restreinte de la question. Assurément, la considération de ce point de vue particulier avait conduit à des résultats exacts et utiles, mais on avait limité gratuitement la généralité de l'analyse, et il en résultait, dans l'étude des fonctions, des anomalies analogues à celles qui surgissent dans la théorie des équations algébriques quand on essaye de l'établir en se bornant à l'emploi des quantités réelles et en excluant les symboles imaginaires. Telle était la lacune qu'il s'agissait de combler.

Déjà, au commencement du siècle, Laplace et d'autres savants de mérite, tels que MM. Brisson et Ostrogradski, s'étaient occupés avec succès de perfectionner l'étude des intégrales en les prenant entre des limites imaginaires; mais ils étaient bien loin d'avoir résolu définitivement la question, et Cauchy, en donnant le résultat de

ses recherches, pouvait affirmer, sans crainte d'être contredit, que « ni leur travail, ni aucun des Mémoires publiés jusqu'à ce jour, sur les diverses branches du calcul intégral, n'avait fixé le degré de généralité que comporte une intégrale définie prise entre des limites imaginaires, et le nombre des valeurs qu'elle peut admettre. » C'était le problème qu'il se proposait de résoudre et qu'il résolut avec une étonnante sagacité.

La matière était extrêmement délicate et difficile, aussi les savants furent longtemps avant de comprendre toute la portée et toute la fécondité des idées émises par l'illustre géomètre. En 1840, des hommes éminents, parmi lesquels on peut citer l'Allemand Eisenstein, en étaient encore à regretter vivement que l'analyse des fonctions fût remplie d'énigmes et de paradoxes, en apparence inexplicables. Il était réservé aux disciples de Cauchy d'achever son œuvre en déduisant de ses découvertes la solution de ces étranges difficultés. C'est ce que firent, en particulier, M. Hermite, dans ses travaux sur les fonctions elliptiques; M. Puiseux, dans ses recherches sur les fonctions algébriques; et MM. Briot et Bouquet, dans leur récent ouvrage sur les fonctions doublement périodiques. La voie est maintenant tracée, et ceux qui la suivront sont assurés d'y recueillir d'abondantes moissons scientifiques.

Ce qui domine surtout dans le génie mathématique de Cauchy, c'est une puissante faculté d'invention, c'est l'art merveilleux avec lequel il savait, au milieu des complications les plus inextricables, se créer tout à coup des méthodes nouvelles. Les difficultés d'une question ne le rebutent pas; si d'autres y ont échoué avant lui, si les ressources de la science lui font défaut, il saura se frayer des routes inconnues, et souvent les problèmes les plus

désespérés seront l'occasion de ses plus belles découvertes. Telle est en particulier l'origine du *Calcul des Résidus*, qui est encore une de ses grandes créations. Ce calcul a été appliqué par lui successivement à l'étude d'une foule de questions d'un ordre très-élevé; à l'analyse des séries, puis à la mécanique moléculaire, à la mécanique céleste, à l'optique et aux diverses branches de la physique mathématique. Il n'est pas possible de donner ici une idée, même sommaire, de ce merveilleux calcul, mais il n'en était pas moins nécessaire de le signaler comme une des méthodes qui ont le plus contribué aux progrès de l'analyse. Un habile mathématicien écrivait en 1827, au sujet du *Calcul des Résidus* : « Je suis sûr qu'en dépit de l'envie, ce calcul restera comme l'une des méthodes les plus simples et les plus générales que les géomètres aient inventées. »

Il ne faudrait pas croire que les recherches de Cauchy, en analyse, fussent de pures spéculations dont le principal mérite serait celui de la difficulté vaincue; c'est, au contraire, un caractère très-remarquable de ses méthodes que, presque toujours, elles sont devenues pour les savants des instruments précieux pour perfectionner et étendre pratiquement le domaine des sciences appliquées. On doit dire, du reste, qu'il en est toujours ainsi des découvertes théoriques réellement sérieuses. Il y a entre les lois abstraites des quantités et les lois concrètes des phénomènes naturels, une intime correspondance et une harmonie parfaite. Quelquefois l'étude de la science pure précède les applications, mais souvent aussi l'étude de la nature se présente la première et détermine ensuite les progrès des théories mathématiques; c'est même à l'occasion de l'étude du monde physique que les plus grandes découvertes analytiques ont été réalisées. La

nécessité de faciliter les immenses calculs des observations astronomiques a conduit Napier à la découverte des logarithmes; l'étude des mouvements célestes a fait trouver à Newton les méthodes du calcul infinitésimal; Laplace, en approfondissant les difficiles problèmes de la Mécanique céleste, a perfectionné plusieurs parties essentielles de l'analyse; au commencement de ce siècle, Fourier et Poisson, en étudiant les lois de la chaleur et des actions moléculaires, ont enrichi la science de méthodes nouvelles; c'est enfin en essayant de résoudre certaines questions de physique et de mécanique appliquée que les savants de notre époque ont été amenés à étudier avec tant de soin la théorie capitale des Fonctions elliptiques.

Ailleurs, au contraire, ce sont les spéculations abstraites qui se présenteront les premières dans l'ordre des temps. On verra, pendant de longues générations, les géomètres occupés à scruter les combinaisons des nombres et les propriétés des figures; des siècles passeront avant qu'on rencontre l'application de leurs subtiles inventions; on se demandera à quoi peuvent servir tant d'investigations curieuses, et quelle peut être l'utilité de ces beaux théorèmes, de ces profondes analyses; enfin, on sera plus porté à admirer le génie des inventeurs qu'à estimer la valeur même de leurs découvertes. Mais un jour viendra où le physicien, désorienté au milieu de la multiplicité des phénomènes, interrogera en vain les forces et les causes de la nature; où l'ingénieur, surpris par des difficultés inattendues, demandera à l'analyse le secret de ses machines; où l'astronome, perdu dans la complication inextricable de ses formules, implorera une main secourable qui lui vienne en aide et lui offre un fil conducteur dans le labyrinthe de ses interminables calculs.

Ce sera le moment du triomphe des géomètres adonnés à l'étude de la science pure. On cessera de dédaigner leurs patientes recherches, et on viendra leur emprunter avec reconnaissance leurs méthodes et leurs procédés de calcul. Les propriétés des *sections coniques* avaient été étudiées avec une remarquable persévérance depuis les temps anciens, mais sans utilité pratique, lorsque Képler vint révéler les relations inattendues de ces courbes avec les orbites planétaires; il s'est ainsi trouvé que, par une disposition en quelque sorte providentielle, Apollonius et ses successeurs, depuis près de deux mille ans, préparaient par leurs travaux spéculatifs les progrès futurs de l'Astronomie. Quelle théorie a essuyé plus de critiques que celle dont l'objet est l'étude des propriétés des nombres? Depuis Diophante jusqu'à Fermat, depuis les Indiens jusqu'aux modernes, les analystes s'en occupaient sans relâche, mais sans résultat apparent. Aujourd'hui cependant cette théorie est une de celles qui rendent le plus de services dans les sciences appliquées. L'étude de la Mécanique moléculaire, en particulier, lui doit des perfectionnements considérables. « Cette étude, dit un géomètre éminent (1), serait superficielle et incomplète si l'on n'avait pas recours aux propriétés des formes quadratiques des nombres entiers; à cette *Théorie des Nombres*, si souvent anathématisée par les détracteurs de la science pure, par les praticiens exclusifs. » On voit, par ces exemples, avec quelle précaution il faut juger les travaux spéculatifs, et de quelle réserve il faut user avant de les condamner comme inutiles.

Ces réflexions s'appliquent également aux travaux de Cauchy. La tendance naturelle de son esprit le portait de

(1) M. Lamé, *Leçons sur l'élasticité des corps solides*.

préférence vers les recherches abstraites, vers les régions élevées de la science. Il semblera d'abord exclusivement occupé de pénétrer les subtiles combinaisons des nombres et des symboles algébriques, mais bientôt il descendra aux applications; le géomètre paraîtra avec ses *Modules*, avec ses *Résidus*, avec tous les instruments de sa mystérieuse algèbre; son génie lui fera apercevoir, dès le premier abord, les analogies et les harmonies cachées qui existent entre ses recherches et les lois des phénomènes naturels; quelques jours de méditation, quelques pages de calcul lui suffiront pour vaincre les difficultés, et les savants, tout à l'heure désespérés de l'inutilité de leurs efforts, applaudiront avec enthousiasme aux découvertes du géomètre.

Parmi les circonstances où Cauchy montra le degré de puissance où l'analyse pouvait atteindre entre ses mains, il n'en est peut-être point de plus remarquable, ni qui ait produit une plus vive sensation, que celle où il fut amené à perfectionner les méthodes de calcul en astronomie. Ses principales recherches à ce sujet remontent à l'année 1840, à l'époque où il venait d'être élu Membre du Bureau des Longitudes. M. Le Verrier, dont les travaux astronomiques sont connus de tout le monde savant, avait présenté à l'Académie un grand Mémoire sur la planète Pallas. La théorie des mouvements de cet astre laissait beaucoup à désirer, et M. Le Verrier avait entrepris d'en faire une étude plus approfondie; mais il se servait pour cet objet des seules méthodes alors en usage, et était ainsi conduit à des calculs d'une complication extrême. Dès lors, comment vérifier les résultats de l'astronome et contrôler sa théorie? Quel serait l'académicien assez dévoué et assez habile pour entreprendre cette lourde tâche? Dans la plupart des cas, il est facile

à un savant exercé de juger les Mémoires soumis à son examen; il aura bientôt vu et apprécié la méthode de l'auteur, il mettra en évidence les résultats principaux, et, au moyen de quelques vérifications, ordinairement assez simples, il lui sera aisé d'en contrôler l'exactitude. Les méthodes employées dans le Mémoire sur Pallas étaient bien connues; d'un autre côté les résultats étaient faciles à saisir, car ils se réduisaient en définitive à un certain nombre d'éléments numériques, propres à la construction des tables astronomiques; mais il n'en était pas de même de leur vérification. Pour s'assurer de leur exactitude, il fallait suivre l'auteur pas à pas et refaire avec lui tous ses calculs; il fallait en deux mots recommencer son travail tout entier. En pareille circonstance, l'Académie se borne ordinairement à accueillir les travaux; elle laisse aux savants le soin de se contrôler mutuellement, et ne tient les résultats pour complétement acquis que lorsque divers savants sont arrivés aux mêmes conséquences par des méthodes différentes. On comprend tout ce qu'une telle manière de procéder a de fâcheux; les questions les plus importantes sont ainsi exposées à demeurer indéfiniment en suspens, au grand détriment de la science. Cette fois du moins, les choses se passèrent autrement. Cauchy fut chargé de l'examen du Mémoire; il se mit aussitôt à l'œuvre, et déploya dans ce travail toutes les ressources de son inépuisable talent. Il tenait d'ailleurs à justifier l'élection récente dont il venait d'être l'objet, et à l'égard de laquelle le refus du serment politique lui suscitait tant d'ennuis. Il accepta le fardeau sans hésiter, et bientôt il reparut à l'Académie avec le résultat complet de ses recherches. Refaire tous les calculs, était une marche impraticable à laquelle il ne fallait pas s'arrêter. Cauchy le comprit, et sa pre-

mière pensée fut de rechercher des procédés plus directs. Il retrouva dans cette circonstance toute sa vigueur et son initiative de jeune homme, lorsque, trente ans auparavant, il devinait, par une intuition de génie, la démonstration des théorèmes d'Euclide et de Fermat. Mais il y a plus; il s'était d'abord uniquement préoccupé de vérifier un Mémoire d'astronomie, et en même temps il découvrait des méthodes nouvelles destinées, par leur importance, à produire dans la science astronomique une véritable révolution.

Complétons cet exposé sommaire par quelques réflexions sur un caractère particulier des travaux scientifiques de Cauchy.

L'Analyse et la Géométrie sont les deux instruments essentiels des recherches mathématiques; le premier permet de découvrir les propriétés et les lois des quantités considérées à un point de vue général et abstrait; le second permet de poursuivre la réalisation et l'application de ces lois dans l'étude de l'étendue figurée. De là, deux méthodes principales dont les savants se servent habituellement dans leurs recherches, recourant tantôt à l'une et tantôt à l'autre, suivant la nature du sujet et la tournure propre de leur esprit; méthodes qui ont des liens intimes et se prêtent sans cesse un mutuel appui. Cependant, si l'on compare leur influence sur le progrès des sciences, il n'est pas douteux que la méthode analytique ne possède un avantage très-réel. C'est elle qui a présidé aux grandes découvertes des temps modernes, et qui a communiqué à l'étude des sciences exactes cette puissante impulsion dont nous recueillons, depuis bientôt deux siècles, les fruits merveilleux. On peut certainement réaliser dans le domaine de la Géométrie pure des inventions vraiment neuves; on doit même ajouter que,

comme moyen d'exposition, les procédés géométriques ont une évidence, une simplicité, une élégance, souvent supérieure à celle des procédés analytiques. Mais enfin, il n'est pas impossible de communiquer ces précieuses qualités à l'Analyse elle-même, et cette dernière conservera toujours une prééminence incontestable lorsqu'il s'agira d'aborder l'étude de problèmes tout à fait nouveaux. L'Analyse constitue dans les sciences mathématiques la véritable méthode d'invention, et c'est en cela surtout que réside sa supériorité.

Dans la plupart de ses travaux, Cauchy a fait un usage presque exclusif de la méthode analytique, et c'est dans les recherches de ce genre qu'il a obtenu ses plus beaux triomphes. Il ne dédaignait pas cependant les recherches géométriques, et, à diverses époques de sa vie, il a montré que dans cette voie il pouvait également prétendre à un rang éminent. Ses premiers travaux, ceux qui attirèrent sur lui, à l'origine de sa carrière, l'attention des savants, étaient de l'ordre géométrique; plus tard, lorsqu'il faudra préciser les lois des séries, interpréter les symboles imaginaires ou restituer à la théorie des Fonctions toute sa généralité, c'est encore à la Géométrie qu'il aura recours; enfin, dans tous ses travaux on le verra employer parallèlement les deux méthodes. Par l'ensemble de ses divers ouvrages il a mérité, mieux que personne, cette dénomination de *Géomètre,* par laquelle on a coutume de désigner les hommes qui embrassent dans leurs études toutes les branches des Mathématiques pures.

Un seul nom peut lui être comparé à notre époque, c'est celui de l'illustre Gauss, son contemporain et son émule. A cause de la similitude que présente leur brillante carrière scientifique, il ne sera pas sans intérêt de

rapprocher un moment les figures de ces deux hommes illustres. Né à Brunswick, en 1777, Gauss, de même que Cauchy, s'était fait connaître de bonne heure par des travaux de premier ordre. Dès la fin du siècle dernier, à l'âge de ving-deux ans, il publiait de savants Mémoires d'analyse. Deux ans plus tard, il donnait son célèbre traité des *Disquisitiones Arithmeticæ*, qui a renouvelé l'Arithmétique transcendante ; devenu, en 1807, professeur d'astronomie à Gœttingue, il mettait bientôt au jour son ouvrage classique : *Theoria motûs corporum cœlestium*. En même temps il s'occupait avec succès de l'étude de la Physique, et ses recherches sur le magnétisme sont demeurées justement célèbres. Il put ainsi réunir à la fois dans sa personne les trois titres glorieux de Géomètre, d'Astronome et de Physicien. Ce sont précisément ceux que les savants ont décernés à Cauchy. Nous avons déjà parlé des travaux de ce dernier comme géomètre et comme astronome, et nous essayerons tout à l'heure de donner une idée des services qu'il a rendus à la physique et à la mécanique. Il ne nous appartient pas de nous prononcer sur le mérite personnel de ces deux grands génies, sur l'importance et la fécondité de leurs découvertes ; qu'il nous soit permis seulement d'exprimer ici une opinion, en nous faisant l'écho des hommes les plus compétents, et de dire que, si sur certains points, sur la théorie des Nombres, par exemple, Gauss a un avantage marqué, Cauchy reprend une supériorité incontestable dans ses recherches sur les Fonctions. Personne avant lui n'avait pénétré aussi loin dans les profondeurs de l'Analyse pure, et n'avait déployé une telle sagacité dans les régions abstraites de la science. Sous ce rapport, il est sans rival.

CHAPITRE X.

TRAVAUX SCIENTIFIQUES.

Nunquam natura magis quam in minimis tota..... In arctum coarctata naturæ majestas, nullâ sui parte mirabilior

PLINE.

DEUXIÈME PARTIE.

Objet de la Mécanique moléculaire. — Constitution intime des corps. — L'éther. — Travaux de Cauchy sur la lumière. — Mémoires sur le phénomène de la dispersion. — Physique mathématique. — Réduction des diverses théories à l'unité. — Élasticité des corps solides. — Titres académiques.

Quelles idées faut-il se former sur la constitution intime des corps et sur les lois qui régissent les actions moléculaires? C'est une question difficile qui a occupé, depuis l'antiquité, les savants et les philosophes. Tous ont disserté longuement sur la nature et les propriétés des éléments; ce serait une lourde tâche que de passer en revue leurs opinions divergentes, depuis les atomes crochus d'Épicure jusqu'au principe de l'attraction universelle; depuis les quatre éléments d'Aristote jusqu'à la transmutation des métaux, et jusqu'aux théories de la chimie moderne. Cependant tous les efforts tentés pour analyser la constitution des corps restaient infructueux. Beaucoup de problèmes avaient été résolus dans l'étude du monde physique; le ciel avait été exploré, et plusieurs de ses lois fondamentales avaient été découvertes; mais

lorsque les savants en redescendaient pour examiner ce qui se passait autour d'eux, et pour ainsi dire à leurs pieds, ils rencontraient des obstacles insurmontables. A mesure qu'ils essayaient de pénétrer plus avant dans l'essence même de la matière, la nature semblait se replier sur elle-même et s'envelopper d'un voile mystérieux. La nature, en effet, se résume tout entière dans les lois des phénomènes élémentaires, et l'on peut dire, en se servant des paroles mêmes du grand naturaliste romain, « qu'elle ne se révèle jamais plus complétement que dans les plus petites choses. »

Plus tard, lorsque Newton eut trouvé les lois des attractions planétaires, la facilité avec laquelle ces lois rendaient compte des phénomènes célestes jusque dans leurs moindres détails fit supposer qu'elles représentaient d'une manière générale le mode d'action mutuelle de toutes les particules matérielles. On pensa donc qu'après avoir donné dans le ciel l'interprétation des effets de l'attraction à grande distance, elles expliqueraient aussi ceux de l'attraction à petite distance qui se passent à l'intérieur des corps. Les premiers essais tentés dans ce sens furent infructueux et, en présence de cette déception, on alla jusqu'à penser que la théorie de Newton était défectueuse, ou du moins que ses lois n'étaient qu'approximatives. Mais, en y réfléchissant, on vit bientôt que la question avait changé de nature, et qu'en réduisant le champ des phénomènes on avait agrandi démesurément les difficultés du problème. L'attraction planétaire, en effet, n'est qu'un cas très-particulier de l'attraction universelle, et le moindre des phénomènes qui se passent entre quelques atomes resserrés dans un espace imperceptible, reproduit, en les exagérant, toutes les difficultés inhérentes à l'étude des mouvements cé-

lestes. Il ne faut donc pas s'étonner si les questions relatives aux actions moléculaires ont présenté jusqu'ici aux physiciens et aux géomètres des obstacles dont ils sont encore loin d'avoir triomphé.

Les éléments de la solution devaient venir d'un autre côté; ils devaient résulter de l'étude de la chaleur, de la lumière et des autres agents du monde physique. L'action de ces agents est intimement liée à la constitution même des atomes, et c'est par leur intermédiaire seulement qu'on peut espérer d'arriver un jour à connaître les véritables principes de la mécanique moléculaire.

Un résultat essentiel de cette étude a été d'amener les savants à reconnaître, en dehors de la matière perceptible à nos sens, l'existence d'un fluide impondérable, répandu dans tout l'univers. Cet agent mystérieux, qu'on désigne sous le nom d'*Éther*, sert aujourd'hui à expliquer la plupart des phénomènes naturels. Pour en avoir une idée, il faut se figurer un fluide excessivement rare et léger, répandu dans tout l'espace et pénétrant jusqu'aux particules les plus intimes des corps. Sa ténuité est telle, que son poids échappe à tout moyen d'observation. Qu'on se représente une balle de plomb suspendue au milieu de l'air le plus raréfié d'une machine pneumatique, on n'aura qu'une idée encore très-imparfaite de la molécule de matière pondérable nageant au milieu de l'éther qui l'environne de toutes parts. Ce fluide est doué en même temps d'une sensibilité extrême, et d'une élasticité parfaite, de sorte que tous les mouvements qui lui sont communiqués, toutes les impressions qu'il reçoit, sont transmis au loin par lui, sans altération, sans déperdition, et avec une prodigieuse rapidité.

Si l'on veut maintenant avoir une idée de la constitution atomique des corps, il faudra y transporter hardi-

ment l'état de choses qui existe dans le ciel. Dans les espaces célestes, nous voyons des astres innombrables réagissant les uns sur les autres et circulant autour de divers centres d'action. Eh bien! chaque corps, chacun des groupes de particules matérielles répandus dans la nature, réalise les mêmes merveilles, chacun d'eux est un ciel en miniature, un monde en raccourci. Si un observateur pouvait se réduire aux dimensions de ce monde infiniment petit et se transporter au centre d'une de ces molécules impalpables, il serait témoin d'un spectacle tout à fait semblable à celui que les cieux nous présentent. Chaque molécule voisine lui apparaîtrait comme un astre, et l'espace, autour de lui, offrirait l'aspect d'un nouveau firmament constellé d'innombrables étoiles. Chacun de ces mondes a ses lois et son astronomie, et, à la rigueur, rien n'empêchera une imagination inventive de transporter dans ces astres atomiques tous les phénomènes et toutes les merveilles dont nous sommes les témoins sur notre propre planète.

Quoi qu'il en soit, c'est à l'étude de l'éther que les savants s'adressent aujourd'hui pour obtenir l'explication des principaux phénomènes de la nature, et le succès éclatant de leurs découvertes permet d'en espérer encore de plus grandes pour l'avenir.

Descartes paraît être le premier qui ait donné à l'hypothèse de l'éther une forme vraiment scientifique en montrant comment on pouvait en déduire l'explication de la lumière et de la chaleur. Avant lui on considérait habituellement ces agents comme des substances matérielles que les corps émettaient de leur sein et lançaient sans cesse dans toutes les directions. C'était l'ancien système de l'*émission*. Dans le système nouveau des *ondulations*, la lumière et la chaleur deviendront de sim-

ples mouvements; chaque molécule sera animée de vibrations extrêmement rapides et incessantes que le milieu élastique de l'éther transmettra au loin dans l'espace. On arrive ainsi à des phénomènes tout semblables à celui que le son produit dans l'air, et le mode de production et de propagation des ondes sonores donne une image fidèle de ce qui se passe pour les ondes calorifiques ou lumineuses. Aujourd'hui l'expérience a prononcé d'une manière définitive entre les deux systèmes. L'émission rend bien compte de certains faits, mais elle en laisse un grand nombre sans explication; d'autres enfin ne peuvent se concilier avec elle. Les ondulations, au contraire, satisfont à toutes les exigences de la science; le doute n'est donc plus possible.

Au commencement de ce siècle plusieurs savants éminents s'étaient déjà occupés avec succès de traiter la théorie de la lumière dans le système des ondulations, et Fresnel, le plus illustre d'entre eux, avait réalisé dans cette partie de la physique des progrès considérables. On admire la sagacité merveilleuse avec laquelle il procédait, mêlant avec une rare habileté le calcul et l'expérience, complétant tour à tour ses formules par l'observation, puis l'observation par des formules nouvelles. La découverte de l'équation de *la surface des ondes* est un trait de génie et comme le résultat d'une véritable divination. On peut en dire autant de ses recherches relatives à la double réfraction, à la diffraction, à la polarisation elliptique et aux autres grands faits de l'optique. Toutefois, malgré leur haute portée, ces travaux demeuraient incomplets; la méthode de tâtonnement, suivie pour les réaliser, était lente et pénible, et ne permettait pas de remonter sûrement à la source et aux lois générales des phénomènes.

Cauchy aborda à son tour la question avec les puissantes ressources de son analyse. Reprenant le problème à son origine, il s'occupa tout d'abord d'étudier la cause première en elle-même et d'en déduire, de la manière la plus générale, les mouvements de la molécule élémentaire, sans faire aucune hypothèse particulière sur la constitution même des corps. Il analysa ensuite les mouvements d'un système de molécules au milieu duquel on vient à produire divers ébranlements, puis s'éleva au cas de deux systèmes de molécules qui viendraient à se pénétrer mutuellement. L'éther n'a point partout la même densité; l'atmosphère éthérée de chaque atome est plus ou moins condensée suivant la nature du corps; de plus, sa densité et son élasticité ne sont pas les mêmes dans chaque direction, et dépendent des formes géométriques primitives des molécules; c'étaient autant d'éléments essentiels dont il fallait tenir compte successivement et qui augmentaient singulièrement la difficulté du problème. Cauchy en triompha heureusement; ses calculs lui ont donné l'explication mathématique des phénomènes les plus délicats, et il a pu en même temps les rattacher entre eux en les faisant tous dépendre d'une cause unique et en les renfermant dans une même théorie.

Les premiers travaux de Cauchy sur cette matière font partie de ses *Anciens Exercices de Mathématiques*, mais c'est à partir de 1830 que ces questions devinrent plus spécialement l'objet de ses études. Dans l'impossibilité où nous sommes d'analyser ici toutes ses recherches, nous nous contenterons de dire quelques mots des beaux Mémoires sur la *Dispersion de la Lumière*, qui furent publiés en 1835 et 1836, à Prague, par les soins de la Société royale des Sciences de cette ville.

Cauchy était alors près de Charles X, occupé de l'édu-

cation du duc de Bordeaux; mais ni les déceptions, ni l'exil, n'avaient ralenti son ardeur scientifique. Il le fait lui-même noblement remarquer dans la préface de l'ouvrage. « On sait assez, y est-il dit, quels événements m'ont fait un devoir de renoncer aux trois chaires que j'occupais en France, et quelle voix auguste a pu, seule, me déterminer à quitter encore la chaire de Physique Mathématique que le roi de Sardaigne avait daigné me confier. Mais ce n'est pas sans doute auprès des descendants de Louis XIV, auprès de ces princes, protecteurs éclairés des lettres et des sciences, que je pourrais me croire dispensé de faire de continuels efforts pour contribuer à leurs progrès. Les *Nouveaux Exercices* paraîtront comme les précédents par livraisons, qui, s'il est possible (car sur cette terre et dans ce siècle surtout on ne saurait répondre du lendemain), se succéderont à des époques peu éloignées les unes des autres. »

Le but principal que se proposait l'auteur était d'établir une théorie mathématique du phénomène de la dispersion des rayons lumineux et de donner l'explication des couleurs qui en sont le résultat.

Si la lumière était homogène et due à un mouvement unique de l'éther, elle se propagerait en restant toujours identique avec elle-même, et, dans ce cas, tous les corps éclairés nous apparaîtraient sous le même aspect et avec une teinte uniforme. Mais, en réalité, l'onde lumineuse résulte de la superposition d'une série d'ondes élémentaires, à chacune desquelles correspond une sensation propre, une couleur déterminée.

Pour se former une idée exacte des faits, il convient de rappeler ce qui se passe dans les phénomènes sonores. Ce qui détermine la nature et la qualité d'un son, c'est la durée plus ou moins grande des vibrations exécutées par

les molécules matérielles. Ces vibrations ne sont pas simples, elles proviennent de la combinaison de plusieurs vibrations élémentaires dont chacune correspond à un son particulier. De là résulte une note harmonique composée de plusieurs notes primitives qu'une oreille exercée sait parfaitement reconnaître. Qu'on écoute attentivement le son produit par une corde tendue, par une lame élastique, par un tuyau d'orgue, on y démêlera facilement plusieurs sons différents. Le phénomène est surtout sensible quand on fait vibrer une forte corde, par exemple celle d'une contre-basse; on discerne alors au moins trois ou quatre sons distincts, et les personnes dont l'ouïe est plus délicate en perçoivent jusqu'à sept.

Il en est exactement de même pour la lumière; à l'air, il suffira de substituer l'éther. Chaque couleur est une sorte de note, caractérisée par les oscillations plus ou moins rapides de la molécule éthérée; un rayon de lumière blanche peut être comparé à une note harmonique, et doit être considéré comme formé par la superposition d'une série de rayons colorés d'espèces différentes. Il y a une gamme lumineuse, comme il y a une gamme musicale. L'analogie se poursuit même jusque dans les moindres détails. Dans la gamme, on compte sept notes distinctes; dans le rayon lumineux, on reconnaît également sept nuances ou couleurs principales. Parmi les notes de la gamme, on en distingue en particulier trois dont la consonnance produit ce qu'on nomme l'*accord parfait;* de même, parmi les couleurs, il y en a trois qu'on peut appeler principales et qui, diversement harmonisées, donnent toutes les autres; enfin, chose remarquable, si l'on établit un parallèle entre les deux gammes, les trois couleurs principales correspondent aux trois notes de l'accord parfait.

Tel est le phénomène dont Cauchy entreprit de donner une explication mathématique, en le rattachant aux vibrations élémentaires des corps. Dans ses premières recherches, il avait obtenu les lois de la propagation et de la polarisation de la lumière en partant des formules qui définissent le mouvement général d'un système de molécules sollicitées par des attractions ou des répulsions mutuelles. Toutefois, ces formules n'étaient qu'approximatives ; et, par exemple, elles ne conduisaient à aucun résultat relativement à la nature et à la dispersion des couleurs. Mais, par cela même qu'elles n'étaient qu'un cas particulier de formules plus générales, on pouvait espérer que l'analyse plus complète de ces dernières donnerait aussi l'explication désirée. Frappé de cette idée, M. Coriolis conseilla à Cauchy de rechercher si la considération des termes négligés ne fournirait pas précisément le moyen d'interpréter la dispersion des couleurs. C'est ce qui arriva en effet.

Le nouveau travail part de ce point que, dans les milieux diaphanes, les vibrations lumineuses ne se propagent pas avec la même vitesse, et qu'il existe une relation déterminée entre cette vitesse de propagation et celle des vibrations lumineuses elles-mêmes. Il faut en excepter cependant l'éther et les fluides aériformes qui n'exercent aucune dipersion sensible sur les rayons colorés. Si cette dispersion existait, dans l'éther par exemple, et si le retard entre les divers rayons était seulement d'un millionième de seconde, l'observation des étoiles dites *changeantes* serait très-propre à le mettre en évidence. Ces étoiles étant situées à des distances immenses, les retards s'ajouteraient successivement dans le trajet; quelque faibles qu'ils fussent à l'origine, ils finiraient par devenir sensibles, et les

rayons simples, n'arrivant plus à l'œil dans le même temps, feraient voir l'étoile colorée successivement des diverses nuances de l'arc en ciel; mais il n'y a rien de semblable. Arago avait fait, à la demande de Cauchy, des expériences dans ce but sur l'étoile changeante appelée Algol, et les observations les plus délicates n'avaient révélé aucune trace de dispersion. Les corps solides ou liquides ont, au contraire, un pouvoir dispersif considérable. Lorsqu'on fait tomber un rayon de lumière blanche sur un prisme, même très-mince, aussitôt les divers rayons élémentaires sont séparés et viennent s'étaler sous la forme brillante d'un spectre irisé.

Sans entrer ici dans des détails qui exigeraient des connaissances spéciales, on peut dire que l'ouvrage de Cauchy, complété plus tard par de nombreux Mémoires publiés, soit dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, soit dans les *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, a heureusement résolu la plupart des questions relatives à la théorie de la lumière. En outre une foule de points délicats, concernant la constitution de l'éther, ont été élucidés; les faits en apparence les plus indépendants ont été réunis par les liens des mêmes formules; enfin une carrière toute nouvelle a été ouverte aux investigations des savants.

Du reste, Cauchy ne s'était pas contenté de présenter une explication simplement théorique des phénomènes étudiés; il s'était en outre préoccupé de traduire ses formules en nombres, afin de montrer l'accord parfait de ses calculs avec les observations. Les nombreux tableaux numériques renfermés dans son ouvrage sur la dispersion de la lumière, prouvent que, malgré sa préférence bien marquée pour l'analyse pure, il ne négligeait pas, quand cela était nécessaire, de descendre aux applica-

tions pratiques, afin de donner à ses théories la sanction décisive de l'expérience. Celles-ci se sont trouvées, en effet, pleinement d'accord avec les travaux des physiciens les plus éminents de son époque, et des recherches plus récentes, parmi lesquelles on doit citer surtout celles de M. Jamin sur les *Rayons évanescents*, en ont confirmé jusqu'aux moindres prévisions.

Après avoir ainsi appliqué, avec un succès extraordinaire, l'analyse à l'étude de la lumière, Cauchy entreprit encore d'expliquer, par les mêmes méthodes, les autres phénomènes qui dépendent des actions moléculaires, et dont l'ensemble constitue la *Physique mathématique* proprement dite. Cette science, d'origine toute moderne, ne remonte pas au delà de ce siècle, et déjà elle a fait de rapides progrès. Aujourd'hui, l'objet des recherches physiques est de ramener à une même cause, à un principe unique, tous les phénomènes de la nature, et l'on est généralement d'accord que cette cause se trouve dans les mouvements élémentaires de la matière. Déjà les oscillations du fluide éthéré ont donné l'explication des faits qui se rapportent à la lumière, et on ne doute plus que la chaleur, l'électricité, le magnétisme, ne dépendent aussi de la même origine ; enfin, tout fait supposer que la pesanteur, la cohésion, l'affinité et les autres phénomènes du même genre ne sont que des cas particuliers et des conséquences immédiates de la théorie des vibrations atomiques. Jusqu'à présent on a eu recours, pour classer les faits du même ordre, à des hypothèses particulières de coordination qui n'ont, très-probablement, rien de réel, mais dont on est bien obligé de se servir en attendant les progrès ultérieurs de la science. Cet état de choses est essentiellement transitoire, et l'époque n'est peut-être pas éloignée où les diverses branches de la

Physique seront rattachées à une même origine et reposeront sur des principes mathématiques aussi rigoureux que ceux de la *Mécanique rationnelle*. Alors quelque géomètre habile s'occupera de réunir en un même corps de doctrine la foule éparse des théories et de compléter l'œuvre de Laplace et de Lagrange, en composant un traité de *Physique analytique*, dont les travaux de Cauchy seront la base et le point de départ.

Parmi les questions nombreuses qui se rattachent à l'étude des mouvements moléculaires, l'une des plus importantes est la théorie de l'*Elasticité des corps solides*. Lorsqu'un corps est en état d'équilibre, les diverses forces qui sollicitent ses molécules se neutralisent mutuellement, et il se produit un repos apparent; si une action extérieure, une pression, une traction, intervient, les atomes sont imperceptiblement écartés de leur position primitive, et le repos est troublé. Toutefois, cette perturbation est momentanée; en vertu de leurs réactions mutuelles, les particules matérielles tendent à reprendre leur position première; elles y reviennent, la dépassent, y reviennent encore et exécutent ainsi une série d'oscillations autour d'un centre moyen. Ce phénomène n'est pas toujours également sensible; on le constate facilement, par exemple, dans les vibrations des cordes, des tiges et en général des corps sonores; dans d'autres circonstances, il échappe à l'observation, mais en réalité il existe dans tous les corps, et il n'en est aucun dont on puisse dire que les molécules soient absolument en repos. L'étude des mouvements intérieurs des corps solides est indispensable aux physiciens et surtout aux ingénieurs; elle conduit en particulier aux lois de la résistance des matériaux employés dans les machines; elle fait connaître en même temps les conditions les plus favorables aux-

quelles doivent satisfaire les constructions pour offrir toutes les garanties désirables de solidité et de durée.

La théorie de l'élasticité des corps solides est devenue de nos jours l'objet des travaux de plusieurs savants éminents, parmi lesquels on doit surtout citer M. Navier, comme ayant donné, le premier, les *Équations aux différences partielles*, dont dépendent les phénomènes élastiques, et M. Lamé, qui a fait de cette théorie le sujet de plusieurs de ses beaux Mémoires. De son côté, Cauchy avait été conduit de bonne heure à s'en occuper, à la suite de ses recherches sur les actions moléculaires, et c'est à lui qu'on doit d'avoir posé les véritables principes de cette étude. Avant lui, on avait bien résolu quelques problèmes particuliers, on possédait certaines règles empiriques, utiles dans la pratique, mais il restait à trouver une méthode générale pour aborder et coordonner toutes les questions de ce genre, et c'est encore dans ses ouvrages que se trouvent les premiers éléments de la solution.

Nous ne pousserons pas plus loin cet aperçu sommaire des principales découvertes de Cauchy. Il est sans doute fort incomplet et n'en donne qu'une idée très-imparfaite; mais, à moins d'entrer dans des détails techniques, il ne serait pas possible d'en présenter un tableau suffisamment exact. Disons seulement, en terminant, que ces découvertes qui font l'admiration des savants ont été, du vivant même de leur auteur, l'occasion des honneurs les plus légitimes. On en jugera par la liste des principaux titres académiques de l'illustre géomètre. Le rappel de ces titres n'était pas assurément indispensable à sa gloire, mais ils montreront combien son génie était universellement apprécié, et avec quel empressement il avait été accueilli au sein des grandes sociétés savantes de tout le monde civilisé.

Outre sa qualité de Membre de l'Académie des Sciences de France, Cauchy faisait encore partie des Sociétés étrangères dont les noms suivent :

Société Royale de Londres.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de Boston.
Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.
Société Royale d'Édimbourg.
Université Impériale de Prague.
Académie des Sciences de Stockholm.
Société Royale des Sciences de Copenhague.
Société Royale des Sciences de Gœttingue.
Académie Royale des Sciences de Bohême.
Société Philosophique de Philadelphie.
Académie Pontificale du nouveau Lynx.
Institut Impérial et Royal Lombard-Vénitien.
Académie des Sciences de Modène.
Société italienne des Sciences de Modène.
Académie Royale des Sciences de Naples.
Académie des Sciences de Palerme.

CHAPITRE XI.

CAUCHY LITTÉRATEUR.

Cognatio studiorum et artium non est minus conjuncta quam illa naturæ.
Cic., *In Verr.*

Influence des sciences sur la littérature. — Mérite de Cauchy comme écrivain. — Ses écrits de polémique. — Ses ouvrages scientifiques. — Son goût pour la poésie latine et française. — L'épître sur l'Astronomie. — Cauchy étudie l'hébreu. — Occasion de cette étude. — Mémoire sur la prosodie hébraïque. — Son aptitude pour l'étude des langues modernes.

On s'étonne quelquefois de la perfection de notre langue ; on vante sa précision et sa clarté ; on admire son ordre méthodique et sa logique rigoureuse ; mais il ne faut pas oublier qu'elle est, en grande partie, l'œuvre de quelques écrivains de génie dont le jugement s'était mûri, dont le goût était devenu plus sûr par l'étude des sciences exactes ou philosophiques. N'est-ce pas, en effet, par les écrits de Descartes et de Pascal que la langue française a été définitivement fixée quant à ses principes et à ses règles? Leurs traditions n'ont pas été interrompues, et, de nos jours encore, les ouvrages des Laplace, des Biot, des Cuvier, des Arago, peuvent être cités comme des modèles de bonne littérature. Si notre langue a résisté victorieusement au mauvais goût et aux entreprises téméraires de certains esprits novateurs, on le doit principalement à l'influence de l'élément scientifique.

Cauchy est venu à son tour, grossir le nombre de ces hommes illustres, et révéler, comme eux, une aptitude remarquable pour tous les travaux de l'intelligence. Nous l'avons vu, dès son jeune âge, parcourir avec éclat le cercle des études classiques; plus tard il montrera, en mainte circonstance, ce qu'il aurait pu devenir comme écrivain. Son style manque peut-être de cette vigueur et de cette hardiesse qui saisissent le lecteur et captivent fortement son esprit; il est plutôt simple et agréable; mais il demeure toujours élevé et substantiel. Son discours n'atteint pas à la majesté de Bossuet et de Pascal, mais on sent dans ses paroles une âme honnête, un cœur convaincu; on y trouve un amour du bien et du juste qui lui gagne dès le premier abord toutes les sympathies. Ce qui domine surtout dans ses écrits, c'est la solidité du raisonnement et la force de la logique. On peut différer avec lui sur les principes, mais, le point de départ une fois admis, il est difficile de mieux prouver. Il faut l'entendre lorsqu'il développe une de ses idées favorites, par exemple lorsqu'il soutient cette thèse : que « l'étude des sciences, loin de dessécher le cœur et de nuire au développement des facultés de l'âme, offre au contraire à l'homme intelligent les ressources les plus précieuses et les leçons les plus utiles. » Son style alors se dilate avec son cœur, la conviction le rend éloquent, les preuves se suivent, animées et abondantes, et bientôt les conclusions arrivent, sous la forme d'interrogations vives et pressantes auxquelles le lecteur ne peut plus échapper.

La plupart de ses écrits, nés des circonstances, portent sur des sujets de polémique : un jour il faudra défendre, dans la personne des Jésuites, des hommes injustement attaqués, des amis qui lui sont chers; une autre fois, il s'agira de plaider en faveur d'une réforme importante

dans le régime judiciaire, ou bien d'obtenir du gouvernement une loi nouvelle pour un but moral et social. Son style prend alors une allure scientifique; la question est posée avec netteté, les divisions sont précisées avec soin, et le but poursuivi avec vigueur. Il convient aussi de faire ressortir un caractère essentiel de ces polémiques; je veux dire la tolérance et l'urbanité. De la part de Cauchy, en effet, la discussion est toujours polie et modérée dans la forme. Trop souvent, dans les œuvres de ce genre, l'auteur donne un libre cours à sa verve caustique et à son indignation; toutes les armes lui sont bonnes pour accabler un adversaire. Cauchy agira tout autrement; à ses yeux, l'adversaire n'est pas un ennemi qu'il faut terrasser, une chose qu'on peut mordre et déchirer impunément. Il ne cessera jamais de voir dans son contradicteur un homme qu'il doit éclairer et convaincre; un esprit égaré qu'il faut amener à déposer lui-même ses erreurs et ses préjugés; sa polémique sera donc toujours bienveillante et courtoise, et, pour la caractériser en un mot, elle sera essentiellement chrétienne. Perdra-t-elle par là quelque chose de son efficacité? Non, assurément. Si, le plus souvent, les luttes de la parole et de la plume sont frappées de stérilité, n'est-ce pas précisément parce qu'elles revêtent un caractère d'âpreté et de violence qui aigrit et divise? On se passionne avec un auteur, on se plait à ses satires et à ses sarcasmes, surtout s'ils sont assaisonnés d'un sel fin et d'un esprit délié; mais, en définitive, personne n'est convaincu, et chacun se fortifie dans ses opinions et dans ses haines. Au contraire, la douceur attire, la tolérance détermine les sympathies; des raisons solides, exposées avec dignité, produisent plus sûrement la persuasion, ou du moins préparent, à la longue, le retour des esprits égarés dont on a eu soin de ménager l'amour-propre.

Les ouvrages purement scientifiques de Cauchy se distinguent également par toutes les qualités propres à ce genre de composition. Il tenait à ce que ses livres et ses Mémoires fussent d'une forme irréprochable. Cette sorte de mérite, jointe à l'importance des matières et à l'éclat des découvertes, justifie le succès des ouvrages de l'illustre géomètre, et explique comment plusieurs d'entre eux sont devenus classiques et ont pris place dans la science à côté de la *Mécanique analytique* et du *Traité des Fonctions*.

On remarquera encore son empressement à saisir et à faire ressortir le côté élevé et philosophique des questions dont il s'occupe. Cette heureuse tendance se manifeste jusque dans ses ouvrages spéciaux et au milieu des matières les plus abstraites. Ainsi, par exemple, dans son *Traité d'Analyse*, après avoir expliqué tous les soins qu'il a pris pour donner à ses méthodes et à ses calculs une extrême rigueur, il craint que certains esprits, en présence des ressources si étendues et si variées des raisonnements mathématiques, ne s'imaginent qu'ils suffisent à tout, et ne tombent dans cette erreur si commune chez les positivistes de nos jours : « que toutes les questions doivent être traitées par la méthode scientifique. » Aussi, s'empresse-t-il d'ajouter : « Si j'ai cherché, d'une part, à perfectionner l'Analyse mathématique, de l'autre, je suis loin de prétendre que cette analyse doive suffire à toutes les sciences de raisonnement. Sans doute, dans les sciences qu'on nomme naturelles, la seule méthode qu'on puisse employer avec succès consiste à observer les faits et à soumettre ensuite les observations au calcul. Mais ce serait une erreur grave de penser qu'on ne trouve la certitude que dans les démonstrations géométriques ou dans le témoignage des sens; et quoique personne jusqu'à ce jour n'ait essayé de prouver par

l'Analyse l'existence d'Auguste ou celle de Louis XIV, tout homme sensé conviendra que cette existence est aussi certaine pour lui que le carré de l'hypoténuse ou le théorème de Maclaurin. Je dirai plus : la démonstration de ce dernier théorème est à la portée d'un petit nombre d'esprits, et les savants eux-mêmes ne sont pas tous d'accord sur l'étendue qu'on doit lui attribuer; tandis que tout le monde sait fort bien par qui la France a été gouvernée pendant le XVIIe siècle, et qu'il ne peut s'élever à ce sujet aucune contestation raisonnable. Ce que je dis ici d'un fait historique peut s'appliquer également à une foule de questions : en religion, en morale, en politique. Soyons donc persuadés qu'il existe des vérités autres que les vérités de l'algèbre, des réalités autres que les objets sensibles. Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au delà de leur domaine; et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'Algèbre ou de Calcul intégral. »

Cauchy s'était essayé dans la poésie et, quoique ce genre de littérature pût paraître assez opposé à ses occupations habituelles, il s'y était exercé avec succès. Il ne faudrait pas sans doute chercher dans ses vers le savoir-faire et la perfection qu'on peut exiger d'un homme exclusivement adonné au culte des muses, et cependant le mérite de ses essais révèle chez l'auteur un talent réel, et montre qu'il aurait pu aussi occuper, comme poëte, un rang distingué.

On a déjà vu qu'il réussissait dans la poésie latine; l'ancien lauréat du concours général témoignait volontiers, à l'occasion, qu'il n'avait pas oublié l'art de tourner avec bonheur un vers latin. Il n'est pas du reste le

seul savant de génie qui se soit livré à cet exercice, en apparence si étranger à la science. Tycho-Brahé y excellait; on conserve de lui plusieurs pièces de poésie latine dans lesquelles il célèbre la gloire de son prédécesseur Copernic, ou bien raconte avec élégance les principales circonstances de sa propre vie. Fermat, à la fois savant jurisconsulte et littérateur, y réussissait également; plus près de nous encore, on se rappelle les vers ingénieux dans lesquels l'illustre Ampère exposait les principes de la philosophie des sciences. Y aurait-il par hasard quelque lien de parenté entre la poésie latine et les mathématiques? L'art de cadencer un vers aurait-il quelque analogie avec celui du géomètre qui combine avec sagacité une formule d'analyse?

La poésie française n'était pas non plus étrangère à Cauchy. Parmi les fragments poétiques qui nous restent de lui, on remarque surtout une pièce intitulée : *Épître d'un mathématicien à un poëte, ou une Leçon d'Astronomie.* Nous allons en présenter ici l'analyse; elle semble offrir à nos lecteurs un double intérêt.

L'auteur se propose de raconter les merveilles que les cieux offrent à nos regards et les secrets que l'Astronomie découvre à notre esprit. Il commence par rassurer un ami inquiet de voir tant de savants occupés à pâlir sur des formules ou bien à sonder avec leurs télescopes les profondeurs du ciel :

Tu me crois obsédé par un mauvais génie,
Alcippe, tu te plains de l'étrange manie
Qui fait qu'en ma maison devenu prisonnier,
D'un flot d'x et d'y grecs je couvre mon papier.
Laisse-là, me dis-tu, l'Algèbre et ses formules,
Laisse-là ton compas, laisse-là tes modules;
C'est un emploi bien triste et des nuits et des jours
Que d'intégrer sans fin et de chiffrer toujours.

Apprendrons-nous du moins à quoi servent tes veilles,
Ce qu'elles produiront d'étonnantes merveilles,
Et si de tes calculs le magique pouvoir
Doit calmer au matin les tristesses du soir?
Tu pourrais sembler digne et d'honneur et d'estime,
Chacun te saurait gré du zèle qui t'anime,
Si sur le prix de l'or tu daignais réfléchir,
Et faisais faire un pas à l'art de s'enrichir.
Mais ont-ils, ces mortels que le destin carresse,
Au Calcul Intégral demandé la richesse?
Vois ce vieux financier, sans cesse à son comptoir.
Il revient supputer son doit et son avoir.
D'enchérir sur Euclide il n'a point la folie;
Il ajoute, soustrait, divise ou multiplie,
Et, de Barême seul écoutant la leçon,
Laisse dormir en paix Descartes et Newton.
. . . . . .
. . . . . Dis-moi, je t'en conjure,
De tous vos grands travaux que voulez-vous conclure?
Que cherchent vos savants, lorsqu'un tube à la main
Ils lorgnent le Soleil ou la Lune en son plein?
Pourquoi s'amusent-ils à compter les étoiles?
Vont-ils de l'avenir percer les sombres voiles,
Ou dans le télescope offrir à nos regards
Les heureux habitants de Mercure ou de Mars?
Pour recueillir là-haut quelque riche héritage,
Voudraient-ils dans Saturne entreprendre un voyage?
— Non; mais, sans concevoir ces frivoles désirs,
Chacun d'eux noblement occupe ses loisirs.
Tandis qu'avec fureur d'autres se font la guerre,
Et pour un vain caprice ensanglantent la terre
Qui va dans un moment disparaître à leurs yeux,
Plus heureux, l'astronome a regardé les cieux.
Là se lisent la gloire et la magnificence
Du Dieu dont l'univers atteste la puissance;
Là se peignent encore et le calme et la paix;
Là règne sans partage et triomphe à jamais
Celui qui des Soleils a tracé la carrière,
De la nuit du chaos fait jaillir la lumière,
Allumé le flambeau du jour,
Transformé la vile poussière
En cet homme, le fruit, l'objet de tant d'amour.

Il s'arrête ensuite, avec complaisance, à énumérer les merveilles de l'univers étoilé, à décrire ce magnifique spectacle dont la vue, il y a trois mille ans, transportait David d'enthousiasme, et qui émeut toujours si profondément l'homme dont le regard se tourne vers les cieux :

Au jour qu'avait fixé la divine sagesse,
Le néant fécondé répondit à sa voix,
Et les cieux avec allégresse
Parurent pour subir ses lois.
Vois-tu, dans les déserts semée,
Des astres la brillante armée
Accourir pour lui plaire, et présente à l'appel.
Se ranger en bataille aux pieds de l'Éternel?
Ici notre Soleil a reconnu sa place;
Un océan de flamme inonde sa surface,
Et de ses rayons d'or les fécondes clartés
Portent au loin la vie aux mondes habités.
Lancés autour de lui dans leurs vastes orbites.
Ces planètes, ces satellites,
Qui, comme des vassaux, semblent former sa cour,
Empruntent de lui seul la chaleur et le jour;
Et de tous ces grands corps l'admirable système,
Qu'une invisible main suspendit dans les cieux,
Sous des aspects divers se présente à nos yeux.
Le Soleil tourne sur lui-même;
Et chaque astre exécute un mouvement pareil,
Tandis que sa surface, et lumineuse et sombre,
D'un côté se cache dans l'ombre,
Puis s'expose en tournant aux regards du Soleil.
. . . . . .
Mais au déclin du jour, quand chaque créature
Aura de son travail accompli la mesure,
Lorsque sous l'horizon descendra le Soleil,
Tous reviendront encor se livrer au sommeil.
Alors de la Lune argentée
Se lèvera le disque radieux.
Quels ravissants tableaux s'offriront à nos yeux.
Quand à sa lumière empruntée
Viendra se joindre encor l'éclat mystérieux
Des milliers de Soleils dont se parent les cieux!

Vois-tu comme une mer tranquille
Brille de tous ces feux, par son onde imités?
Vois-tu comme le flot mobile
Balance mollement leurs si douces clartés?

Ailleurs, il aborde la tâche difficile d'exposer dans ses vers les lois mathématiques des mouvements planétaires et de traduire sous une forme poétique des théorémes d'Algèbre ou de Géométrie; il s'en acquitte avec bonheur. Ici il décrit les phases de la Lune :

Des secrets de Thalès heureux dépositaire,
Je pourrais t'expliquer la nature et les lois
Des phases que subit la Lune à chaque mois;
Comment aux yeux ravis des habitants du globe
Elle se montre ou se dérobe,
Croît, s'arrondit, décroît et disparaît enfin;
Comment et Vénus et Mercure,
A leur tour changeant de figure,
Se montrent seulement le soir ou le matin.

Plus loin, il définit le phénomène délicat de la précession des équinoxes :

.....Lorsque la Terre avance,
Son axe avec lenteur en tournant se balance,
Et d'un tel mouvement habile à profiter,
L'équinoxe plus tôt revient nous visiter.

Il dira encore

.....des Marées
Le périodique retour;
Comment par le Soleil et la Lune attirées,
Deux fois s'élèvent, chaque jour,
Et deux fois dans leur lit rentrent obéissantes,
Ces eaux de l'Océan, ces vagues mugissantes
Que notre mer embrasse en son vaste contour.

Il passe ensuite en revue les comètes « à la longue chevelure; » il montre les étoiles multiples circulant les

unes autour des autres; il pénètre dans la voie lactée, dans ces nébuleuses reléguées, comme des points imperceptibles, aux extrémités de la création, et où le télescope découvre aux regards émerveillés de l'astronome des millions de Soleils semblables au nôtre.

Mais à des spectacles pareils
Mon esprit se confond; je me tais, et j'adore
Celui dont le nom glorieux
Se lit en traits si doux sur les feux de l'aurore
Et sur le pavillon des cieux.

Ces essais littéraires, outre leur mérite propre, empruntent encore un charme nouveau aux circonstances dans lesquelles ils se sont produits. Ainsi, par exemple, l'Épitre sur l'Astronomie fut composée à l'occasion des conférences littéraires et scientifiques qui, sous le nom d'*Institut catholique*, avaient été fondées en faveur des jeunes gens studieux de la capitale. Elle eut ensuite les honneurs d'une lecture publique dans une réunion solennelle des cinq Académies, où elle fut très-appréciée par les hommes compétents; mais sa première origine marque mieux le but modeste et chrétien de l'auteur.

Le même sentiment de piété filiale et de délicate attention qui, dans ses lettres à son père, lui inspirait autrefois ses essais de poésie latine, l'avait conduit également à s'occuper d'un autre genre d'étude encore plus inattendu de sa part : je veux parler de la langue hébraïque, car Cauchy a été aussi hébraïsant. Nous avons déjà eu occasion de dire que M. Cauchy père s'était appliqué à l'étude de l'hébreu. Retrouver dans le texte primitif de nos livres saints le secret d'un rhythme depuis longtemps oublié, et rendre sensibles à l'oreille, par un meilleur système de lecture, la beauté et l'harmonie de ces chants sacrés qui transportaient jadis d'enthousiasme

le peuple juif, tel était le problème difficile qu'il avait entrepris de résoudre. Il était ainsi arrivé à rétablir une véritable prosodie hébraïque, et à reconstituer, dans un petit nombre de règles simples et élémentaires, la législation tout entière de cette antique poésie. Ce fut l'occupation principale des vingt dernières années de sa vie, et il s'y livra avec toute l'ardeur de la jeunesse et la persévérance de l'âge mûr. Cinquante années de longs et utiles services n'avaient point épuisé son activité, et, dans sa verte vieillesse, il retrouvait toute sa vigueur première lorsqu'il s'agissait de ses études favorites. On se rappelle dans sa famille avec quel art il se plaisait souvent à réciter, d'après ses règles, divers passages hébreux des livres saints; les versets de la Genèse et des Psaumes retrouvaient dans sa bouche un charme merveilleux; on aurait cru entendre un chant d'Homère.

Pour s'initier à cette étude dont l'accès est réputé si difficile, Augustin Cauchy n'avait pas eu besoin d'un grand effort. Son aptitude pour les langues était si remarquable que, ce qui pour d'autres eût été une tâche laborieuse et pénible, pour lui n'avait été qu'un jeu. Il lui avait suffi, pour ainsi dire, d'ouvrir l'oreille et d'écouter; ce fut, en effet dans de simples entretiens avec son père que Cauchy apprit l'hébreu à Arcueil, comme il avait appris l'allemand à Prague, l'italien à Turin. D'écolier, il devint bientôt maître; non content d'entendre exposer les résultats d'études et les théories nouvelles dont la mémoire de son père était remplie et qui s'en écoulaient avec autant de verve que d'intérêt, il partageait lui-même son zèle investigateur, allait au-devant des découvertes, devinait les objections et y trouvait des réponses. Mais surtout son esprit plus jeune, encore en possession de toute sa souplesse, s'appliquait à

présenter dans un ordre méthodique, et à formuler en axiomes d'une rigueur presque géométrique, les principes auxquels son père avait été conduit par ce travail d'examen dont la variété bannissait la fatigue, tandis qu'un travail de rédaction suivi aurait dépassé les forces de cet étudiant plus qu'octogénaire. C'est ainsi que le fils fut amené à prêter sa méthode et sa plume pour rédiger ce que le père découvrait lentement avec sa patience de vieillard et son expérience consommée des secrets de la langue hébraïque.

Le résultat de leurs travaux communs est contenu dans un savant exposé qui fut l'objet d'une lecture publique devant l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. Il a pour titre : « Mémoire sur la Prosodie des langues orientales, et en particulier sur la Prosodie biblique. » Son point de départ réside dans l'analogie de l'alphabet grec avec l'alphabet hébreu. Les vingt-deux lettres qui composent ce dernier sont précisément celles dont se composait l'alphabet grec, apporté d'Orient par Cadmus. Les lettres correspondantes sont rangées dans le même ordre, portent des noms analogues, et doivent être prononcées avec emploi des mêmes sons. Il en résulte qu'on peut écrire l'hébreu en lettres grecques ; c'est ce que fait l'auteur du Mémoire, afin d'en rendre la lecture plus facile pour les personnes même qui ne seraient pas familiarisées avec les caractères hébraïques.

En second lieu, les voyelles de l'alphabet hébreu se retrouvent aussi chez les Grecs et devaient leur offrir les mêmes sons. Dans l'hébreu, comme dans les autres langues, deux ou trois voyelles peuvent se réunir pour former des diphtongues. En particulier, quatre de ces voyelles servent à former le nom de Dieu. Les diphtongues sont en hébreu au nombre de dix-huit, de sorte que

cette langue se trouve être plus riche, en ce genre de vocalités, que toutes les autres langues connues.

La versification hébraïque se composait de divers rhythmes dont chacun offrait une mesure déterminée, c'est-à-dire un nombre déterminé de syllabes. On y distingue quatre sortes de rhythmes qui renferment respectivement quatre, cinq, six ou huit syllabes. Les rhythmes peuvent s'assembler deux à deux, trois à trois, ou même en plus grand nombre. A un rhythme impair, renfermant cinq syllabes, doivent succéder un ou plusieurs rhythmes impairs. Les rhythmes pairs ne s'assemblent jamais qu'avec des rhythmes pairs. Un vers est l'assemblage de deux rhythmes, tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Tels sont les principes simples sur lesquels repose la prosodie biblique. Au moyen de ces règles, on arrive facilement à reconnaître que la Genèse, par exemple, est composée de vers hexamètres, analogues aux alexandrins des Grecs et des Latins.

Cette méthode ingénieuse permet en même temps de reconnaître et de rectifier certaines différences qui se remarquent entre les divers textes, et qui, suivant toute apparence, sont dues à des erreurs de copistes. Ces erreurs ont introduit, en effet, des fautes contre les règles de la versification, et, réciproquement, l'application de ces règles fait connaître la nature des corrections à effectuer. Ainsi, dans plusieurs versets du premier chapitre de la Genèse, Dieu, après chaque phase de la création, se rend ce témoignage que le résultat en est bon (*et Deus vidit quod esset bonum*). Or, le terme hébreu qui correspond au mot *vidit*, et qui, dans la plupart des textes, a bien la signification convenable, se trouve remplacé, dans d'autres versions, par un terme offrant une voyelle de moins, et dont la signification correspond alors au mot

latin *timuit;* mais en même temps la prosodie est en défaut, et, pour rétablir la règle, il suffit de restituer la voyelle supprimée, ce qui fait retrouver le sens logique de la phrase.

On voit, par ce court résumé, que le Mémoire de Cauchy portait sur un objet d'une valeur sérieuse pour les érudits. Il est presque inutile d'ajouter qu'il fut accueilli avec le plus vif intérêt par les Membres de l'Académie des Inscriptions et des Belles-Lettres, agréablement surpris de recevoir une telle communication de la part d'un de leurs collègues de l'Académie des Sciences.

CHAPITRE XII.

SENTIMENTS CHRÉTIENS DE CAUCHY.

> Je me suis enfoncé dans l'étude des sciences humaines, et j'ai de plus en plus reconnu la vérité de ces paroles de Bacon : Que si un peu de philosophie nous rend incrédules, beaucoup de science nous ramène à être chrétiens.
>
> AUG. CAUCHY.

Origine et nature de ces sentiments. — Profession de foi chrétienne. — Accord de la science et de la foi. — Appel à la jeunesse studieuse. — Droits de la vérité. — De la tolérance et de la liberté. — Jugement de Cauchy sur le XVIIIe siècle.

Lorsqu'on étudie la vie des hommes illustres, on y rencontre ordinairement un mobile général, une pensée fondamentale qui règle toutes leurs actions; là se trouvent la source de leur supériorité et le secret de leurs succès. Cette unité de principes est ce qui rend une vie vraiment féconde; elle donne de la valeur même aux existences secondaires, et, dans une âme d'élite, elle rehausse singulièrement les dons précieux du génie.

Chez Augustin Cauchy, l'idée dominante était, de sa nature, essentiellement religieuse, et le principe général de sa conduite, profondément chrétien. Ce caractère intime se retrouve au fond de toutes ses actions, et il ne faut jamais l'oublier si on veut apprécier exactement l'ensemble de sa vie.

Il n'est pas rare de rencontrer chez les savants des sentiments religieux, on peut même dire que ces sentiments

sont le résultat immédiat de toute science élevée. L'homme qui passe sa vie à étudier les grandes lois de la nature et qui le fait avec un esprit vraiment philosophique, en s'appliquant à remonter à l'origine des choses et à la source de toutes les vérités, rencontre nécessairement sur sa route l'idée d'un Dieu créateur, dont la puissance et la sagesse éclatent partout dans l'univers. Mais il faut bien le reconnaître, le plus souvent l'idée religieuse demeure à l'état de pure spéculation et se perd dans un certain vague philosophique, sans se traduire par des actes positifs dans le cours habituel de la vie. Augustin Cauchy devait se montrer à la fois plus rigoureux et plus logique.

Un Dieu créateur et maître, principe de notre être et terme de nos destinées : tel était le point de départ de ses croyances. La fin de l'homme, ici-bas, est de le servir et de l'aimer, afin de mériter de le posséder éternellement dans le ciel. Tout le reste est secondaire et doit nous demeurer indifférent. La vie ou la mort, la santé ou la maladie, les richesses ou les privations, les succès ou les épreuves, en un mot tous les événements de cette vie, ne sont que des incidents et n'ont de valeur que comme des moyens pour atteindre le but suprême. Telles étaient les grandes pensées qui l'inspiraient; c'est sous leur impulsion qu'il s'appliqua à développer les nobles facultés de son esprit et de son cœur.

Mais ce n'était point encore assez. Il y a une religion révélée dans laquelle Dieu a fait connaître à l'homme le culte qu'il attend de lui. Cette religion a des mystères inaccessibles à la raison, des préceptes sévères aux passions; elle impose aux fidèles des devoirs précis dont on ne peut se dispenser sans résister à l'autorité même de Dieu. C'est là surtout ce qui révolte notre orgueil, et

cependant, s'il est vrai que Dieu ait parlé, comment pourrait-on, sans inconséquence, refuser de lui obéir? Ce défaut de logique, si commun de nos jours, révoltait l'esprit scientifique de Cauchy. Il n'admettait pas ces moyens termes, ces raisonnements illusoires par lesquels on élude la pratique des devoirs religieux. Il voyait dans les enseignements de la foi un enchaînement rigoureux de principes et de conséquences : s'abstenir de conclure en religion lui paraissait aussi absurde que de se refuser à déduire les corollaires d'un théorème de géométrie.

Ce caractère pratiquement chrétien de Cauchy est d'autant plus remarquable que les circonstances au milieu desquelles il vécut semblaient devoir moins s'y prêter. L'époque où il est né n'était rien moins que croyante. Une grande rénovation allait s'opérer dans la société européenne ; on l'attendait avec impatience et on en espérait de grands et nobles résultats ; mais la direction du mouvement était entre les mains des fils du XVIIIe siècle, qui fut peut-être le moins religieux de tous les siècles. L'incrédulité régnait partout; les philosophes avaient déclaré au Christianisme une guerre acharnée et le poursuivaient sans relâche, appelant à leur aide la raison, la science et toutes les ressources de l'esprit humain. A bout de moyens, ils avaient eu recours au ridicule, la plus terrible des armes. Le succès dépassa leur attente, car en essayant de détruire l'idée chrétienne il se trouva qu'ils avaient ruiné en même temps les principes fondamentaux de la morale et de la société. On sait assez quel fut le résultat de cette guerre de religion d'un nouveau genre.

Lorsque Napoléon, après ses premiers triomphes, entreprit de rétablir sur ses bases la société bouleversée, il comprit que l'élément religieux devait être le point de

départ du nouvel ordre de choses. Le *Concordat* fut le premier acte de son pouvoir naissant. Mais il est plus facile de gagner des victoires que de commander aux consciences; on n'impose pas aux peuples la chose du monde la plus libre : la foi. Aussi le Premier Consul eut d'immenses obstacles à vaincre; les hommes de son temps, qui avaient été élevés au milieu des excès révolutionnaires, conservaient les traditions de leur origine et voyaient avec indifférence, souvent avec indignation et colère, le rétablissement du culte; il ne fallut rien moins que le prestige de son génie et de sa gloire pour lui faire pardonner par ses contemporains d'avoir relevé les autels et d'avoir voulu rendre de nouveau la France catholique. Toutefois, à côté de ces hommes, il y en eut d'autres qui saluèrent avec bonheur et enthousiasme ce retour salutaire, et qui y contribuèrent puissamment par l'influence de leurs talents, de leur position, et surtout de leurs exemples.

Cauchy prit rang de bonne heure parmi ces derniers. Nous avons dit quelle fut son enfance et comment il sut montrer que, même chez un jeune homme, la pratique des devoirs religieux s'allie très-bien avec le talent le plus distingué. Cependant il vint un moment où le savant dut chercher à approfondir ses croyances. La soumission docile aux leçons qui avaient guidé son enfance, les sentiments d'honnêteté et de droiture qui avaient sauvegardé sa jeunesse, ne suffisaient plus à l'homme mûr, au géomètre habitué à traiter toutes les questions suivant les règles d'un raisonnement rigoureux et à tout soumettre aux exigences d'une algèbre inflexible. Ce moment critique arrive nécessairement pour tout homme intelligent; il n'en est pas un seul qui, au moins une fois dans sa vie, au sortir de la première jeunesse, ne se soit placé,

dans toute la liberté de son esprit, en face de ces difficiles et redoutables problèmes que soulèvent la philosophie et la religion, la morale et la foi. Époque solennelle, où l'homme, parvenu à la plénitude de ses facultés, va décider s'il doit rompre avec son passé, ou si les principes qui ont présidé à la première partie de sa vie continueront d'être la règle définitive de son existence! Combien sont nombreux ceux qui s'égarent et se perdent dans cette recherche capitale! Avides de liberté et d'indépendance, séduits le plus souvent par l'attrait des plaisirs, entraînés par la violence des passions, ils rejettent dédaigneusement le passé et s'élancent vers un avenir tout rempli d'illusions et de trompeuses promesses. Cauchy connut cette crise de l'âme; non-seulement il en sortit victorieux, mais il puisa dans cette épreuve une force nouvelle pour ses convictions, une ardeur plus énergique pour le bien. Il examina les principes de ses croyances, il sonda les bases de sa foi, et si l'on veut connaître le résultat de ses recherches, il faut entendre cette profession de foi qui, par son élévation et son éloquence, égale tout ce que l'histoire du génie chrétien nous offre de plus beau :

« Je suis chrétien, c'est-à-dire que je crois à la divinité de Jésus-Christ, avec Tycho-Brahé, Copernic, Descartes, Newton, Fermat, Leibnitz, Pascal, Grimaldi, Euler, Guldin, Boscowich, Gerdil, avec tous les grands astronomes, tous les grands physiciens, tous les grands géomètres des siècles passés. Je suis même catholique avec la plupart d'entre eux; et, si l'on m'en demandait la raison, je la donnerais volontiers. On verrait que mes convictions sont le résultat, non de préjugés de naissance, mais d'un examen approfondi. Je suis catholique sincère, comme l'ont été Corneille, Racine, la Bruyère, Bossuet, Bourdaloue, Fénelon, comme l'ont été et le sont

encore un grand nombre des hommes les plus distingués de notre époque, de ceux qui ont fait le plus d'honneur à la science, à la philosophie, à la littérature, qui ont le plus illustré nos Académies. Je partage les convictions profondes qu'ont manifestées par leurs paroles, par leurs actions et par leurs écrits, tant de savants du premier ordre, les Ruffini, les Haüy, les Laennec, les Ampère, les Pelletier, les Freycinet, les Coriolis ; et, si j'évite de nommer ceux qui restent, de peur de blesser leur modestie, je puis dire du moins que j'aimais à retrouver toute la noblesse, toute la générosité de la foi chrétienne dans mes illustres amis, dans le créateur de la cristallographie, dans les inventeurs de la kinine et du stéthoscope, dans le navigateur célèbre que porta l'*Uranie* et dans l'immortel auteur de l'électricité dynamique. »

Les intérêts de la science et de la religion seront donc également sacrés à ses yeux, et il ne cessera de les confondre dans un même culte et un même amour. Qu'on cesse de lui opposer que la science est contraire à la foi et qu'il est indigne d'un savant de remplir les devoirs de sa religion. Il répondra en rappelant tout ce que la science compte d'hommes éminents, qui sont restés pieux sans cesser d'être savants ; en montrant cette multitude de littérateurs, d'orateurs, de philosophes, qui sont l'honneur du genre humain, et chez lesquels on reconnaîtra une foi inébranlable jointe aux dons les plus sublimes de l'intelligence et du génie. Si tant d'hommes illustres ont honoré et pratiqué la religion, il faut bien avouer que leurs principes n'avaient rien de contraire à la raison, et qu'on peut très-bien être religieux sans cesser d'être raisonnable. Mais continuons cet exposé.

Non-seulement la véritable science n'est point hostile à la religion, elle est encore son alliée naturelle et lui

prête constamment le plus solide appui. Quelques faits incomplets ou mal interprétés peuvent d'abord inspirer des doutes; habilement exploités par des adversaires passionnés, ils pourront jeter du trouble dans les esprits : mais bientôt la vérité se manifeste, les découvertes s'achèvent, les faits s'expliquent et apportent tout à coup à la vérité religieuse le secours d'une démonstration inattendue.

Cauchy avait été le témoin de quelques-unes de ces entreprises téméraires qui se produisirent de son temps avec éclat, et dont le souvenir n'est pas encore effacé. Il avait assisté au triomphe momentané de Volney et de Dupuis; il avait vu le livre des *Ruines* et celui de l'*Origine des Cultes*, éclipsés d'abord par le *Génie du Christianisme*, reprendre subitement une faveur nouvelle. La découverte de certains monuments antiques pendant la campagne d'Égypte leur avait procuré des arguments spécieux. En particulier Dupuis avait exercé son imagination inventive au sujet du zodiaque de Denderah; une interprétation arbitraire des hiéroglyphes qui y sont tracés lui avait donné lieu de faire remonter l'histoire à une date de dix à vingt mille ans, ce qui, le cas échéant, ruinait par la base les traditions bibliques. Toutefois, la vérité ne devait pas tarder à reprendre ses droits. Les travaux des Young et des Champollion vinrent bientôt dissiper les ténèbres de ces obscures questions, et ces fameux monuments, sur lesquels l'incrédulité fondait de si bruyantes espérances, sont allés, depuis longtemps déjà, reprendre modestement leur place parmi ceux qui se rapportent à l'époque de la domination romaine en Égypte. Cauchy ne se laissa jamais éblouir par cet étalage de fausse science et d'érudition factice; il ne cessa de protester contre ces doctrines menteuses et de prémunir la jeu-

nesse contre ces attaques perfides. On lira avec plaisir les sages conseils qu'il avait l'habitude de lui adresser à ce sujet.

« Eh quoi ! me dira le jeune homme qui n'a étudié le Christianisme que dans l'*Origine des Cultes* ou dans le livre des *Ruines*, voudriez-vous donc me réduire à croire des mystères absurdes, des faits contredits par les monuments de l'antiquité? Vous n'avez donc pas suivi la marche de l'esprit humain et le progrès des lumières? Vous ignorez donc que les sciences modernes ont dissipé, comme de vains fantômes, tous ces vieux préjugés qui avaient obscurci la raison de nos pères? — Non, je n'ignore pas les vains sophismes par lesquels des esprits superficiels ont cherché à ébranler les croyances les plus respectables et les mieux fondées. *Je me suis enfoncé dans l'étude des sciences humaines, particulièrement de celles qu'on nomme sciences exactes, et j'ai de plus en plus reconnu la vérité de ces paroles de Bacon : « Que si un peu de philosophie nous » rend incrédules, beaucoup de philosophie nous ramène à » être chrétiens.* » J'ai vu que toutes les attaques dirigées contre la révélation ont abouti à en fournir de nouvelles preuves. Je connais l'histoire de ces fameux zodiaques élevés, nous disait-on, dix ou douze mille ans avant l'époque où Moïse nous représente le monde sortant des mains du Créateur, et qui, après les savantes recherches des Visconti, des Testa, des Paravey, des Biot, des Champollion, ont été réduits à ne pas compter plus de vingt siècles, tellement, qu'on les croit maintenant construits sous les empereurs romains. Je sais ce qu'il faut penser d'autres assertions du même genre qui devaient fournir des arguments irrésistibles contre les livres saints, et sont entièrement discréditées aujourd'hui dans l'esprit des vrais savants; par exemple que l'homme descend du

polype, qu'il a existé sur la terre de toute éternité, que le déluge est une fable, que la création de l'homme et des animaux est un effet du hasard, et que de nos jours encore on le voit sortir des îles du grand Océan; que les Américains forment une espèce d'hommes bien distincte de la nôtre, etc. »

Mais ce n'était pas assez pour lui de s'adresser à l'esprit des jeunes gens pour les convaincre; il voulait surtout parler à leur cœur pour y réveiller ces sentiments généreux que les passions viennent trop souvent étouffer. Il ne lui suffisait pas de les détourner de l'erreur et du vice, il s'efforçait encore de leur inspirer l'amour de la vérité et de la vertu; il les excitait à combattre eux-mêmes énergiquement pour la cause du vrai et du bien. Avec quelle insistance il les invitait à se livrer à l'étude! Avec quelle éloquence persuasive il les pressait de renoncer à des plaisirs vulgaires et méprisables pour accueillir avec amour tout ce qui est digne d'honneur et de respect! Avant tout, il voulait qu'ils conservassent en eux l'esprit de foi, et qu'ils fussent des chrétiens convaincus et logiques.

« Vous ne partagez pas cette conviction, leur disait-il, cela se peut; mais ce que je vous demande aujourd'hui, ce n'est pas de professer une religion que vous ne connaissez pas encore, ce n'est pas d'adopter sans examen des dogmes qui, sans être opposés à la raison de l'homme, surpassent son intelligence; c'est au contraire d'étudier surtout ce qu'il importe de connaître, c'est de prêter une attention sérieuse à ce qui touche aux plus grands intérêts de l'humanité. Du reste, cultivez avec ardeur les sciences abstraites et les sciences naturelles, décomposez la matière, dévoilez à nos regards surpris les merveilles de la nature, explorez, s'il se peut, toutes les

parties de cet univers ; fouillez ensuite les annales des nations, les histoires des anciens peuples ; consultez, sur toute la surface du globe, les vieux monuments des siècles passés ; loin d'être alarmé de ces recherches, je les provoquerai sans cesse ; je les encouragerai de mes efforts et de mes vœux ; je ne craindrai pas que la vérité se trouve en contradiction avec elle-même, ni que les faits, les documents, par vous recueillis, puissent jamais n'être pas d'accord avec nos livres sacrés. Ce que je vous demande encore, c'est d'apporter dans la recherche de la vérité cette candeur, cette bonne foi qui aplanissent la voie pour arriver jusqu'à elle ; c'est enfin, si vous avez eu le malheur d'adorer de vaines idoles, de vous laisser entraîner par les illusions de la jeunesse, de chercher une félicité fugitive dans de frivoles plaisirs, c'est de ne pas trop vous effrayer de la grandeur du but que je vous propose. Commencez par ne pas désespérer de vous-mêmes, par ne pas vous calomnier en vous supposant pires que vous n'êtes. Ayez le courage d'honorer la vertu, lors même que vous n'avez pas le courage de la suivre ; soyez disposés à rendre hommage à la vérité, lors même qu'elle ne vous serait pas favorable. Si vous avez laissé corrompre votre cœur, au moins ne laissez pas corrompre votre intelligence. Prêts à périr dans les flots que vos passions soulèvent autour de vous, ne brisez pas la seule planche de salut qui vous reste, et si le présent doit vous laisser un jour des regrets, au moins préparez-vous des consolations dans l'avenir. Apprenez à vous vaincre, c'est là tout le secret de l'héroïsme. Dans le chemin qui conduit au vrai bonheur, une victoire amène une autre victoire ; et qui sait si, après avoir été le jouet des vents sur une mer agitée par la tempête, si même, après avoir bu à longs traits dans la coupe de l'erreur et du mensonge,

vous ne deviendrez pas, quelque jour, un pilote intrépide, un illustre défenseur de la vérité. »

Chercher la vérité, la posséder et la défendre, tel était l'objet de ses désirs, le but suprême de ses efforts. Sa vie s'était passée à la poursuivre dans l'ordre des sciences exactes, et cette recherche avait été pour lui la source des jouissances les plus délicates. Mais cela ne suffisait pas à son esprit. Ce qu'il voulait, ce n'était pas une vérité partielle, une vérité limitée aux nombres et aux figures, une vérité dont le seul objet fût la nature sensible ; il lui fallait la vérité complète et totale, dans l'ordre de la philosophie et de la foi, comme dans celui de la science pure.

Cette réunion de toutes les sciences en un seul faisceau, a été le but essentiel des travaux des grands génies scientifiques, surtout pendant les époques où le mouvement intellectuel a pris le plus d'expansion. De nos jours, on tend malheureusement à rompre cette admirable unité; on voudrait que la science se suffît à elle-même et que le savant demeurât isolé dans la sphère de ses recherches. Cauchy proteste en toute circonstance contre cette tendance funeste. Il est le premier à rendre justice au puissant mouvement scientifique de notre siècle ; ce n'est certes pas lui qui l'aurait condamné, reniant ainsi ce qui était l'objet de ses travaux continuels et l'âme de toute sa vie ; mais il ne veut pas que les savants se renferment dans les régions inférieures de l'ordre physique et purement naturel ; il les presse de s'élever plus haut ; il leur apprend comment ils doivent remonter jusqu'à Dieu afin de transfigurer en quelque sorte la vérité humaine dans l'éclat de la vérité divine.

« Nous sommes arrivés, dit-il à ce sujet, à une époque extraordinaire où une activité sans cesse renaissante

dévore tous les esprits. L'homme a mesuré les cieux, sondé les profondeurs des abîmes ; il a consulté les débris des vieux monuments, et leur a demandé de lui raconter l'histoire des générations qui dorment ensevelies dans la poussière du tombeau ; il a visité les sommets des monts les plus inaccessibles et les plages les plus reculées, les déserts brûlants où règnent les feux du tropique et les arides rochers qu'environnent les glaces des pôles ; il s'est élevé dans la région des tempêtes et est descendu jusque dans les entrailles de la terre, afin d'y assister, s'il était possible, à la création même de notre planète ; il a décomposé les éléments et les a fait servir à ses besoins ou à ses caprices ; il a forcé la vapeur et les gaz de guider ses vaisseaux sur les plaines de l'Océan, ou de transporter sa nacelle au milieu des airs ; enfin, après avoir scruté la nature, il a porté un œil investigateur sur les bases mêmes de l'ordre moral et de la société, et il a cité au tribunal de sa raison le Dieu qui lui a donné l'être. Quel sera le fruit de tant de courses lointaines, de tant de fatigues, de tant de travaux ? Si je demande à ceux qui les entreprennent quel est le but de leurs pénibles recherches, ils me répondront sans doute que c'est la conquête de la vérité. N'est-ce pas, en effet, pour la conquête de la vérité que celui-là s'enfonce dans la poudre des bibliothèques afin de connaître dans tous leurs détails les législations des peuples anciens, ou de rectifier quelques dates, ou d'établir quelques faits qu'il puisse joindre à l'histoire des siècles passés ? N'est-ce pas dans le même dessein qu'un autre traverse les mers, qu'il observe dans les ruines de Thèbes ou de Palmyre les mœurs et les usages de l'Égypte et de la Syrie ? N'est-ce pas encore pour conquérir la vérité que celui-là entreprend les recherches les plus délicates de la Physique et de la Chi-

mie, et que, le scalpel à la main, il consulte un cadavre inanimé sur les moyens de prolonger l'existence de ses semblables? N'est-ce pas enfin pour conquérir la vérité que cet autre interroge l'algèbre, épuise toutes les ressources de l'analyse, et demande à une formule de lui apprendre les lois qui régissent le cours des astres ou les vibrations insensibles des dernières particules de la matière? Oui, sans doute, la recherche de la vérité doit être le but unique de toute la science; c'est vers elle que sont dirigés les efforts des vrais savants; c'est à elle surtout qu'ils consacrent leurs veilles. Faut-il s'en étonner? L'esprit humain, fait pour la posséder, ne peut trouver de repos hors de son empire. L'homme ne saurait se passer de la vérité; il ne peut vivre sans elle; elle est une des conditions de son existence, comme l'air qu'il respire et le pain qui le nourrit. La vérité est un trésor inestimable, dont l'acquisition n'est suivie d'aucun remords et ne trouble point la paix de l'âme. La contemplation de ses célestes traits, de sa beauté divine, suffit à nous dédommager des sacrifices que nous faisons pour la découvrir, et le bonheur du ciel même n'est que la possession pleine et entière de l'immortelle vérité. »

Ce respect, ce culte de Cauchy pour tout ce qui est vrai, lui avait inspiré un vif sentiment des droits que la vérité elle-même possède sur nos esprits. A ses yeux, la vérité n'était point une chose vulgaire, une espèce d'idole muette et insensible, à laquelle on peut indifféremment accorder ou refuser ses hommages. Dès que l'homme l'a aperçue dans son intelligence, il se doit à elle tout entier et sans réserve; il ne doit rien négliger pour acquérir et conserver ce précieux trésor. Et, s'il en est ainsi des simples vérités scientifiques, avec quel respect faudra-t-il traiter les vérités bien autrement importantes de l'ordre moral?

Cauchy n'admettait sur ce point aucune transaction, et il était pour lui-même, dans les diverses circonstances de la vie, d'une sévérité qu'on pourra peut-être trouver exagérée, mais qui, du moins, témoigne hautement de la noblesse de ses sentiments et de la sincérité de ses convictions.

A côté de cette fermeté dans le devoir, il usait pour les autres d'une extrême tolérance. Il comprenait trop bien l'excellence de la liberté pour ne pas la respecter chez autrui. Personne ne fut plus soucieux du soin de sa dignité et de son indépendance, mais, par cela même, il se faisait une règle de ne pas disputer aux autres la possession d'un bien auquel il attachait tant de prix. Cette disposition sympathique se manifestait dans toute sa conduite; elle inspirait ses moindres démarches et le rendait bienveillant même pour ceux dont il avait le plus à se plaindre. Mais si la tolérance pour les personnes est un devoir essentiel et l'un des principaux attributs de la charité chrétienne, il ne pouvait admettre qu'il en fût de même pour l'erreur et le mensonge. Il repoussait donc avec énergie cette tolérance fausse et perfide, à l'abri de laquelle on propage tant de maximes dangereuses et détestables; sa conscience protestait avec indignation contre une telle confusion. A ses yeux, la vérité seule a des droits, l'erreur n'en a aucun, et le mensonge est partout une chose essentiellement vile et méprisable. Quels titres auraient-ils à se faire accepter, et à réclamer un droit de cité dans le monde des intelligences? Ils sont la cause première de tous nos maux, et lorsqu'une société a le malheur de les accueillir dans son sein, elle se prépare des calamités incalculables. Cauchy discute quelque part cette question délicate, et voici en quels termes il s'exprime :

« C'est ici peut-être le lieu d'examiner ce qu'il faut entendre par les mots de tolérance et de liberté. Que demandent les partisans d'une liberté illimitée? Que chacun ait le droit de faire ce que bon lui semble. Mais, s'il en est ainsi, chacun voudra faire ce qui lui est le plus utile, ce qui servira le mieux ses intérêts. Or, loin que les intérêts des hommes se trouvent tous d'accord, ces intérêts sont constamment en opposition les uns avec les autres. Les biens, les honneurs, les dignités, ne peuvent en général devenir le partage d'un individu, d'une famille nouvelle, qu'en cessant d'être le partage d'un autre individu, d'une autre famille. D'ailleurs, prenez-y garde, la liberté que Dieu a donnée à l'homme n'est pas un droit : c'est une faculté, de choisir entre le bien et le mal, entre le juste et l'injuste, entre le vice et la vertu; ainsi, par exemple, il arrive souvent que l'on est libre, par le fait, de sauver ou d'assassiner son semblable, de le secourir s'il est pauvre, de le dépouiller s'il est riche. On peut donc user ou abuser de la liberté. Mais la raison, d'accord avec la loi divine, nous enseigne clairement que le bon usage de la liberté doit être récompensé, que l'abus doit être puni. Ainsi l'on ne peut jamais accorder aux hommes, comme un droit, la liberté de faire le mal. Seulement la prudence conseille de tolérer un mal lorsqu'il est impossible d'y remédier sans en occasionner un plus grand ; mais jamais les lois humaines ne peuvent autoriser le mal comme principe, et une loi qui le ferait serait nulle de soi.

» Parlons maintenant de la tolérance, ou plutôt de la charité chrétienne, car, sous peine de ne plus s'entendre, il est bon de ne pas changer le sens que les mots ont reçu. L'erreur matérielle et l'erreur morale, qui traîne le vice à sa suite, se trouvent directement opposées

aux intérêts matériels et moraux de l'homme et de la société. L'erreur est donc l'éternelle ennemie de l'homme. La vérité seule peut lui donner d'utiles conseils, et comme tel homme qui adopte aujourd'hui l'erreur peut la rejeter demain, il en résulte que l'erreur ne doit pas être confondue avec celui qui a le malheur de s'y attacher. Aussi la religion catholique, qui a reçu pour mission d'enseigner aux hommes toutes les vérités morales, nous oblige-t-elle à détester l'erreur morale et le vice, en même temps qu'elle nous ordonne d'aimer l'infortuné qui s'égare. Il y a plus : c'est précisément l'amour que nous portons à nos semblables qui nous interdit de favoriser jamais la propagation de l'erreur. Cette règle est commune aux gouvernements et aux individus. Assurément, personne ne s'avisera jamais de soutenir que, dans les cours de science, on doive enseigner indifféremment aux élèves les vraies et les fausses théories ; l'oxygène ou le phlogistique, la pesanteur de l'air ou l'horreur de la nature pour le vide, les attractions moléculaires ou les atomes crochus d'Épicure. Eh bien ! la proposition qu'on rougirait de faire quand il s'agit des sciences abstraites, ou de la physique, ou de la chimie, attendu que par des doctrines erronées on pourrait compromettre des intérêts matériels, cette proposition deviendra-t-elle licite lorsqu'il s'agira de la science à laquelle se rattachent nos intérêts les plus élevés, nos immortelles destinées ; de la science qui a pour objet les rapports de l'homme avec ses semblables, de la créature avec son créateur? »

On ne sera pas étonné sans doute si un esprit de cette trempe devait éprouver une vive et profonde antipathie pour le XVIIIe siècle, « pour ce siècle élégant mais dépravé qui avait corrompu la morale et les mœurs; pour ce siècle spirituel mais impie qui avait espéré détruire à

jamais l'idée religieuse, et qui, en essayant de chasser Dieu de ce monde, avait produit plus d'athées que tous les siècles précédents. » Mais ce que Cauchy lui reprochait surtout, c'était « d'avoir abusé des plus beaux talents et d'avoir déshonoré la science elle-même en la mettant au service de son impiété. »

« Sans doute, disait-il, les passions peuvent, en obscurcissant l'intelligence de l'homme, l'empêcher de reconnaître la vérité; et c'est ainsi que les mœurs de la Régence produisirent, dans le dernier siècle, cette prétendue philosophie qui, après avoir abaissé l'homme au-dessous de la brute, en vint jusqu'à nier l'existence du seul être par qui tout existe ; de celui-là seul qui subsiste nécessairement; de celui dont la beauté infinie doit être l'objet de notre intelligence, comme sa bonté infinie doit être l'objet de notre amour. Le caractère propre du XVIIIe siècle, et la source des calamités sans nombre dont il a inondé la terre, c'est l'abus des talents et de la science, employés à corrompre les cœurs, à pervertir les intelligences, à détruire la notion même du devoir, et à effacer, s'il était possible, jusqu'au souvenir de ce qu'il y a de grand et de sacré parmi les hommes. Le crime de ce siècle, c'est d'avoir voulu soulever toute la nature contre son auteur, et armer contre Dieu, qui est la vérité même, les sciences dont le but unique devait être la recherche de la vérité. C'est en effet par le pompeux étalage d'un faux savoir et d'une vaine philosophie, que l'incrédulité moderne est parvenue à séduire une foule d'esprits superficiels. C'est ainsi qu'elle s'est fait écouter des grands et des puissants du siècle, et que l'irréligion, après avoir envahi les classes élevées de la société, est descendue dans la cabane du pauvre, dont elle a fait le jouet de toutes les misères et l'instrument de tous les crimes. Pour punir les peuples

qui avaient prêté l'oreille aux discours des impies, il a suffi que la Providence les abandonnât à la conduite de ces hommes présomptueux, de ces prétendus réformateurs du genre humain. Bientôt la société s'est dissoute, et le monde entier est devenu le théâtre d'un vaste incendie qui n'éclaire plus que des ruines.

» Toutefois, l'homme ne saurait se reposer dans le doute, et le règne de l'erreur ne saurait être de longue durée. Aussi, voyez quelle inquiétude a saisi tout à coup les disciples de la moderne philosophie. N'apercevant autour d'eux qu'un vide immense, n'osant mesurer la profondeur du gouffre où leurs maîtres les ont précipités, ils parlent d'un dogme nouveau, d'une religion nouvelle qu'ils ne sauraient définir. Ils conçoivent tout le néant des doctrines qui les ont séduits; ils commencent à s'apercevoir que des sarcasmes ne sont pas des raisons, qu'il a y quelque différence entre l'homme et la brute, que Dieu, que la Providence, ne sont pas des mots vides de sens. Mais, habitués à considérer la religion chrétienne comme un majestueux édifice appuyé sur des fondements ruineux, dont les sciences humaines auraient fini par découvrir la fragilité, ou comme un système philosophique qui, après avoir charmé les peuples du moyen âge et hâté les progrès de l'esprit humain, doit disparaître à son tour pour faire place à d'autres systèmes, les philosophes de nos jours sembleraient craindre de trahir la vérité elle-même s'ils revenaient à la foi catholique et aux croyances de tous les siècles. »

Cet exposé fait connaître la nature des sentiments religieux de Cauchy; on voit combien ils étaient vifs et profonds. Mais, ce qui ne mérite pas moins de fixer notre attention, c'est le soin avec lequel il s'appliquait à mettre sa vie d'accord avec ses principes. Non content de satis-

faire aux préceptes, il s'efforçait de mettre en pratique les conseils eux-mêmes. De là tant d'œuvres charitables, tant de dévouements généreux dont il nous faut maintenant présenter le récit, et qui suffiraient à illustrer une vie moins remplie que la sienne. On nous pardonnera d'y insister longuement, mais le champ est vaste et la large part que Cauchy a donnée, dans son existence, à la pratique de la charité, justifiera celle qui lui sera faite dans ce récit. On ne connaîtrait, du reste, que très-imparfaitement cet homme admirable si l'on négligeait ce côté essentiel de sa vie.

CHAPITRE XIII.

ŒUVRES CHRÉTIENNES.

Je vous avoue que jamais je n'ai eu plus de consolation que quand j'ai eu le bonheur de servir les pauvres.
Paroles de SAINT VINCENT DE PAUL.

Œuvre de Saint François-Régis. — La science mise au service de la charité. — Appel en faveur des Irlandais. — Réforme du régime des criminels. — Œuvre des petits savoyards. — La société de Saint Vincent de Paul. — Esprit de prosélytisme.

Le nom de Cauchy se trouve associé intimement à la plupart des œuvres chrétiennes de son temps ; plusieurs d'entre elles ont reçu de lui des développements considérables, et quelques-unes lui doivent même l'existence.

En 1826, le vénérable M. Gossin entreprenait de fonder l'œuvre de Saint François-Régis dont le but est la réhabilitation des unions illicites et la légitimation des enfants issus de ces unions. Une expérience journalière apprend que, dans les classes laborieuses, la misère provient ordinairement de l'irrégularité des mœurs. Constituer la famille sur les bases de la morale et de la religion, c'est donc à la fois rétablir l'ordre et rendre un important service aux individus et à la société. C'est dans les grandes villes surtout que la nécessité d'une telle action se fait sentir, et pour donner une idée de l'étendue du mal nous rappellerons, avec l'*Annuaire du Bureau des Longitudes,* ce fait désolant que, dans la seule ville de Paris, plus du tiers des naissances sont illégitimes. Mais tout

en signalant le mal, il est juste de reconnaître que, pour leurs mariages, les pauvres rencontrent des difficultés de plus d'une sorte. Ils ignorent habituellement de quelle manière ils peuvent se procurer les pièces nécessaires, les actes de notoriété, le consentement des père et mère, les dispenses civiles en cas de parenté ; ils se perdent au milieu de la complication de toutes ces formalités, et renoncent dès lors à se mettre en règle.

La difficulté principale résidait dans les frais imposés par les actes qu'il faut rassembler de tous les points de la France, ou qu'on est même souvent obligé de faire venir de l'étranger. Pour lever cet obstacle, Cauchy conçut le projet d'obtenir du Gouvernement la présentation d'une loi, afin d'affranchir des taxes ordinaires les actes délivrés pour le mariage des indigents. En conséquence, il rédige une pétition dans laquelle il s'attache à faire ressortir l'importance sociale de l'œuvre. La pétition est promptement couverte de signatures ; ce sont celles de ses confrères des cinq Académies, puis d'une foule d'hommes considérables, divisés d'opinion pour la plupart, et qui sont tout étonnés de se trouver un jour réunis sur le terrain neutre de la charité. Fort de cet appui, Cauchy put obtenir plus facilement les suffrages des hommes d'État dans les Chambres, et bientôt un ministre tint à honneur d'attacher son nom à cette mesure bienfaisante.

On remarquera cette manière de procéder, d'ailleurs habituelle chez Cauchy, qui consistait à mettre la science elle-même au service de la charité, et à chercher jusque dans les rangs des savants un point d'appui pour la réalisation de ses pieux desseins. C'est ainsi qu'il a toujours agi pour les diverses œuvres dont il s'est occupé. Lui arrivait-il de rencontrer une difficulté, un obstacle qui eût arrêté un moins ferme courage, c'était à ses chers et sa-

vants confrères de l'Institut qu'il s'adressait d'abord; il trouvait là son grand moyen d'influence, et, on doit le dire à l'honneur de l'illustre corps, cette coopération ne lui fit jamais défaut. Quel zèle, quel entrain, quelle persévérance il déployait! Avec quelle ingénieuse diplomatie il savait, moitié par sympathie pour la cause qu'il défendait si bien, moitié par amitié pour sa personne, entraîner l'un, convaincre l'autre, obtenir d'abord quelques signatures à côté de la sienne, puis un plus grand nombre, puis presque toutes; associant ainsi à ses bonnes œuvres l'Académie des Sciences, et souvent l'Institut tout entier. Quelle joie lorsque, après la séance du lundi, il venait passer la soirée dans sa famille! Comme il était heureux de faire lire, au bas d'une supplique adressée au Gouvernement, ou d'une liste de souscription pour une personne malheureuse, les noms les plus illustres de la science mêlés à ceux des hommes les plus considérables par leur naissance ou par leur situation dans le pays.

Cauchy put ainsi, dans diverses circonstances, obtenir des résultats remarquables, et donner à ses entreprises une portée imprévue. C'est ce qui arriva en 1846 au sujet de l'œuvre des Irlandais. La famine désolait une partie de l'Europe, et l'Irlande était plus particulièrement atteinte par le cruel fléau. Chaque jour les journaux apportaient le récit de scènes déchirantes qu'on croirait empruntées aux époques les plus désastreuses du moyen âge. A cette vue, le savant se sentit ému jusqu'au fond des entrailles, et, nouveau Vincent de Paul, il résolut de venir en aide à cette nation infortunée. Voici en quels termes un témoin véridique raconte sa généreuse tentative (1) :

(1) *Voir* un article de M. de Riancey dans le journal *l'Union* du 16 janvier 1857.

« Un matin, avant l'aube, il accourt chez celui qui écrit ces lignes ; il veut exécuter une pensée toute nouvelle. Une supplique sera adressée au Père commun des fidèles ; elle sollicitera un appel direct du Souverain Pontife à la catholicité pour arracher un peuple fidèle à la faim et à la mort. Cette supplique, l'Institut sera convié à la signer, sans distinction d'opinions, de nuances, de religion même ; après l'Institut, les chambres, les salons, tout ce qui possède quelque notoriété en France. La lettre est rédigée : c'est Cauchy qui la portera de porte en porte avec les instances redoublées de sa commisération qui ne craint pas d'être importune. Il est sûr du succès, et rien ne l'arrêtera. Il ne s'était pas trompé, il n'avait pas trop présumé de la générosité française ; d'ailleurs, qui eût résisté à cette prédication du génie et de la charité ? En peu de jours, Cauchy, épuisé, presque malade de fatigue, avait recueilli des signatures par centaines ; il les remettait au nonce apostolique qui, ému et émerveillé, les envoyait en toute hâte à Rome. Grégoire XVI, l'ami des sciences et des lettres, le promoteur de l'apostolat, accueillait immédiatement la demande, invoquait le concours de ses frères dans l'épiscopat, ouvrait les trésors de l'Église. Ainsi sollicitées du monde entier, les aumônes dépassèrent plusieurs millions, et l'Irlande fut sauvée. »

Dans une autre circonstance, de nature très-différente, il s'agissait d'une réforme à apporter au régime des criminels. « Non-seulement nos prisons actuelles ne corrigent pas, mais elles dépravent, » avait dit, dans un document célèbre, M. Alexis de Tocqueville, membre de l'Institut et rapporteur de la loi sur les prisons. Vivement préoccupés de la même pensée, les membres d'un jury de cour d'assises de la Seine, parmi lesquels siégeait, en

1843, Augustin Cauchy, résolurent d'exposer, dans un Mémoire à soumettre aux autorités compétentes, leurs observations et leurs vœux. Cauchy fut chargé de la rédaction de ce Mémoire qu'il fit imprimer sous ce titre : « Considérations sur les moyens de prévenir les crimes et de réformer les criminels. » Quatre questions principales y sont discutées; elles se rapportent aux points suivants :

1° Procurer aux enfants des classes pauvres, et surtout à ceux qui, élevés dans la misère et le vice, deviendront plus tard le fléau de la société, la bonne éducation dont ils sont généralement privés;

2° Soustraire les prévenus et les condamnés aux leçons du crime qu'ils reçoivent dans les prisons;

3° Faciliter la réforme des criminels et leur retour au bien, en leur faisant donner, dans les prisons, la bonne éducation dont ils ont été privés, pour la plupart, avant leur condamnation;

4° Prendre des mesures telles que, parmi les coupables, chacun de ceux qui rentrent dans la vie commune, après l'expiration de leur peine, ne soit pas considéré et ne se considère pas lui-même comme un ennemi de la société.

La solution de ces diverses questions est traitée, dans le travail de Cauchy, au double point de vue de l'économie politique et de la morale religieuse; et si l'on veut juger du mérite de l'écrit lui-même, il suffira de rapporter la lettre suivante de M. de Tocqueville, à qui l'auteur l'avait communiqué :

« Monsieur, j'ai lu attentivement le manuscrit que vous avez bien voulu me confier. Cette lecture a été pour moi d'un intérêt extrême, et je ne puis trop vous remercier de m'avoir permis de la faire. Je pense que la publi-

cation de cet opuscule servira puissamment la cause de la réforme.

» Veuillez, etc.

» ALEXIS DE TOCQUEVILLE. »

On voit assez par là que rien n'échappait au zèle actif de Cauchy, et qu'il était toujours prêt à se mettre, à la première occasion, au service du bien public.

Ce zèle ne se démentait point, même pour les œuvres de moindre importance. S'agissait-il, par exemple, de venir en aide à une famille éprouvée, ou de soulager quelque pressante infortune, aussitôt le savant quittait ses formules et multipliait ses démarches, frappant à toutes les portes, sollicitant avec instance, quelquefois jusqu'à l'importunité, ses amis et ses collègues, adressant des requêtes et des suppliques, et ne s'arrêtant que lorsque le succès avait couronné ses efforts. Pour le malheureux, tout est difficulté; ordinairement, à son approche, les visages deviennent sévères, les portes se ferment, les réclamations les mieux fondées ne sont pas accueillies. Telle admission dans un hôpital nécessite souvent plus de sollicitations que l'obtention d'une place lucrative ou d'une distinction enviée. Ceux-là seuls peuvent le savoir qui ont à s'occuper des affaires du pauvre. Faut-il donc s'étonner si celui-ci, après avoir longtemps lutté, finit par renoncer à se défendre contre l'aiguillon du besoin, et s'abandonne tristement à une misère qu'il regarde comme incurable! Le malheureux n'y arrive pas tout d'un coup; il a d'abord essayé de résister aux étreintes de l'adversité, aux instigations perfides de la faim; un bon conseil l'eût préservé, un secours opportun l'eût peut-être sauvé; il n'a rencontré ni l'un ni l'autre, et il est tombé.

Et maintenant sa chute sera-t-elle sans remède? Une main charitable ne viendra-t-elle pas l'aider à sortir de sa misère et le relever à ses propres yeux, en lui rendant, avec le pain de chaque jour, le courage et le sentiment de sa dignité? Tel est le but que poursuivent tant de personnes qui se dévouent au soulagement des pauvres, et qui mettent au service des bonnes œuvres, avec tant d'abnégation, leur temps, leur influence et leur fortune. Les invitations divines ont retenti à leurs oreilles et ont pénétré leurs cœurs d'un charme puissant; dès lors, l'exercice des œuvres de miséricorde est devenu une habitude de leur vie, et elles ont trouvé dans cette douce occupation les consolations les plus efficaces et les émotions les plus délicieuses qu'il soit possible à l'homme de goûter ici-bas. Cauchy en a fait bien souvent l'épreuve. Soulager les malheureux et poursuivre leur réhabilitation morale, fut toujours l'objet de ses plus constants efforts. Son activité à cet égard était infatigable : rien ne le décourageait, ni l'étendue du mal, ni l'aspect repoussant du vice, et on l'a vu braver jusqu'à la contagion même des maladies pour atteindre ce but sacré.

On peut dire cependant qu'il y avait un objet privilégié de son zèle, c'était le soin des enfants et des jeunes gens. Procurer à la jeunesse le bienfait de l'instruction, et surtout d'une éducation chrétienne, était, à ses yeux, la base de toutes les œuvres charitables. Lorsque le pauvre a traîné avec lui, dans l'âge mûr, la chaîne de ses mauvaises habitudes, il la brise difficilement; sa bonne volonté même devient impuissante. Il n'en est pas ainsi dans le premier âge; alors le naturel est mobile et léger, mais l'âme est candide, l'esprit flexible, et par conséquent mieux préparé à recevoir les impressions qu'on y dépose.

Le temps pourra les affaiblir, mais non les effacer, et elles finiront par se réveiller quelque jour. Qui pourrait dire surtout les avantages d'une bonne première communion? C'est elle qui décidera souvent de l'avenir de l'enfant. Cette première communion est peut-être la seule qu'il fera pendant le cours d'une longue vie; il faut donc qu'elle produise une impression profonde sur sa jeune âme qui sera bientôt exposée à tant de dangers; il faut que le souvenir doux et salutaire de ce moment solennel puisse se retrouver encore dans quelque coin de son cœur, ne fût-ce qu'à l'article de la mort.

Parmi les œuvres établies en faveur de l'enfance, celle des *petits Savoyards* est assurément une des plus dignes d'intérêt. Chacun de nous connaît ces pauvres enfants qui, chaque année, au retour des frimas, quittent leurs chétives chaumières et leurs montagnes neigeuses, pour venir, dans les grandes villes, gagner laborieusement un morceau de pain noir; chacun se rappelle ces voix suppliantes qui, au détour d'une rue, vous demandent bien humblement « un petit sou », ou qui, au sommet d'une cheminée enfumée, chantent gaiement un refrain du pays. Cependant le pays est bien loin; les parents ont fait place à un maître, souvent dur et exigeant, qui, au bout d'une journée froide et pénible, se contentera de donner au petit Savoyard un maigre repas, et pour couche un peu de paille dans un réduit obscur. Quel bonheur pour lui de rencontrer régulièrement, à des jours déterminés, des protecteurs, des amis qui s'intéressent à son sort et lui prodiguent des soins charitables! Car, il ne faut pas s'y tromper, sous la couche de suie noire et épaisse qui salit cette figure, vit une âme immortelle, et, dans cette poitrine qu'on aperçoit à travers des vêtements en lambeaux, bat un cœur d'homme. Mais

c'est surtout le jour de la première communion qu'on aime à revoir ces pauvres enfants, lorsque des mains plus que maternelles ont substitué un vêtement décent à ces haillons déchirés, et ont rendu à ces jeunes figures toute la fraîcheur de leur âge ; il y a là comme une apparition gracieuse du génie de la charité.

L'œuvre des *petits Savoyards* répondait trop bien au caractère de Cauchy pour ne pas trouver un écho dans son cœur ; aussi il s'y dévoua longtemps avec une véritable tendresse. C'était un touchant spectacle que de voir dans ces réunions l'illustre géomètre, en compagnie d'un duc Mathieu de Montmorency, ou d'un comte Alexis de Noailles, se faire humble et petit pour instruire ces disciples d'un nouveau genre, et leur inculquer les premiers principes du catéchisme.

Une œuvre plus vaste, et qui semble résumer en elle toutes les autres, servira comme de couronnement à cette partie de notre récit : je veux parler des *Conférences de Saint-Vincent de Paul.* La pratique des bonnes œuvres, pour produire tous ses fruits, doit être entreprise avec suite et régularité ; les tentatives individuelles et isolées seront toujours impuissantes devant l'étendue de certaines misères, et c'est seulement dans l'association qu'on peut y trouver un remède efficace. Tel était le grand avantage que Cauchy recherchait dans la Société de Saint-Vincent de Paul. Il y trouvait réuni ce qui constituait ses plus chères affections : pour but charitable, le service des pauvres, auxquels il avait consacré la meilleure part de sa vie ; pour instrument de cette charité, les jeunes gens, qui furent toujours l'objet de ses plus vives sollicitudes. Il y trouvait encore ce trésor d'amitiés chrétiennes qui ne reposent pas uniquement sur les convenances sociales ou sur la base trop fragile des sympathies natu-

relles, mais qui, fondées sur le principe de la vraie charité, ignorent les vicissitudes des amitiés humaines.

On connaît les origines de cette Société qui, après avoir eu d'humbles commencements, s'est répandue successivement dans toute l'Europe, et jusque dans les contrées les plus reculées de l'ancien et du nouveau monde. C'était en 1833, peu de temps après une révolution dont l'effervescence n'était pas encore calmée. Les esprits, inquiets de l'avenir, cherchaient, au milieu du conflit des événements et des doctrines, les principes définitifs sur lesquels devait reposer notre société. Dans l'ordre politique, les légitimistes, les constitutionnels, les républicains, vantaient à l'envi les systèmes de leur choix ; dans le champ non moins vaste de l'économie sociale, les saint-simoniens, les phalanstériens, les socialistes, exaltaient bruyamment des utopies d'où devaient sortir, suivant eux, le bien-être universel et le progrès indéfini de l'humanité. Parmi les réunions sans nombre où l'on soulevait ainsi les problèmes de l'avenir, il y en avait une, composée de jeunes gens, encore étudiants pour la plupart, où l'on agitait dans des conférences d'histoire, de littérature et de philosophie, les questions les plus actuelles et les plus brûlantes (1) ; mais, au milieu du tumulte de la discussion et du choc des idées contradictoires, il ne surgissait aucune lumière, et, loin de se rapprocher, les esprits se divisaient de plus en plus. En présence de l'impuissance des doctrines philosophiques, quelques membres de cette conférence littéraire résolurent d'unir leurs efforts pour tenter une autre solution du problème. Jusque-là, on avait beaucoup parlé et l'on n'avait rien fait ;

---

(1) *Voir* la correspondance de Frédéric Ozanam, dans la *Revue d'Economie chrétienne*, années 1863 et 1864.

désormais, on parlera moins et l'on agira davantage. On apportera un remède plus direct aux souffrances et aux misères qui abondent partout : on ira trouver le pauvre dans son réduit et on lui portera des secours ; à l'aumône matérielle on joindra l'aumône infiniment plus précieuse du bon conseil et du bon exemple. Ces généreux jeunes gens iront plus loin encore. Ils sont chrétiens, ils savent que la religion est le seul fondement sérieux de tout progrès moral, l'âme de toute œuvre vraiment féconde ; ils s'attacheront donc à réveiller chez les malheureux le sentiment de la foi ; ils s'efforceront d'abord de le maintenir et de le développer en eux-mêmes. Afin de bien préciser leur but et leurs moyens d'action, ils choisiront un patron ; ce sera l'homme qui a rempli le XVIIe siècle des monuments de son inépuisable charité ; l'homme que la Révolution elle-même avait respecté dans ses proscriptions, et qu'elle avait rangé parmi les bienfaiteurs de l'humanité ; l'homme enfin que l'Église venait de placer sur ses autels et d'offrir au monde comme un modèle achevé de la charité chrétienne. Vincent de Paul devait être le patron de l'œuvre nouvelle ; ce nom, inscrit sur son drapeau, apprenait à tous qu'il s'agissait, non pas simplement d'une entreprise de bienfaisance ou de philanthropie, mais d'une œuvre inspirée par les préceptes les plus sublimes de l'Évangile.

C'est ainsi que huit jeunes étudiants, sans crédit, sans fortune, sans expérience, entreprirent de résoudre, au nom de la religion, un des grands problèmes sociaux de notre époque. Ils ne se doutaient pas alors de l'avenir réservé par la Providence à leur pieuse tentative ; ils voulaient simplement mettre leurs efforts en commun pour exercer des œuvres de miséricorde ; ils voulaient aussi, jeunes et inexpérimentés comme ils l'étaient, se prému

nir eux-mêmes contre les dangers de leur âge, et mettre, suivant l'heureuse expression d'un orateur célèbre, « leur chasteté sous la protection de leur charité. » Et cependant la Société de Saint-Vincent de Paul, partie d'une origine si modeste, a bientôt pris un accroissement merveilleux; son développement inattendu est venu réveiller notre siècle au milieu de son indifférence, et inquiéter jusqu'aux hommes politiques, peu habitués à croire à des dévouements désintéressés et n'ayant pour base que la charité et l'amour des pauvres.

On comprend combien une telle œuvre dut rencontrer de sympathie dans l'âme ardente et généreuse de Cauchy. Lorsque la Société de Saint-Vincent de Paul s'organisa, il était hors de France; il ne put donc prendre part à son établissement; mais, à peine de retour, il s'empressa de lui apporter le concours le plus actif et le plus dévoué. Membre de la Conférence de Sceaux, qui avait été fondée par ses soins, il fut, à ce titre, pendant de longues années, le soutien de toutes les infortunes et la providence de tous les malheureux.

Il nous reste à faire ressortir, en terminant ce chapitre, un dernier trait du caractère religieux de Cauchy; c'est ce qu'on peut appeler l'esprit d'apostolat chrétien. Il excellait dans l'art de toucher les cœurs endurcis et de ramener à la foi les âmes égarées. On résistait rarement à ses paroles bienveillantes, à ses manières simples et affectueuses : on cédait volontiers à la bonté sympathique qui débordait de son cœur et rayonnait au dehors dans toute sa personne. Son influence, d'ailleurs, ne s'exerçait pas seulement sur les pauvres qu'il assistait, et qui, à cause même de ses bienfaits, se trouvaient mieux préparés à recevoir ses pieuses exhortations; elle s'étendait aussi à une foule de personnes de tout âge et de toute

condition. Il ne laissait passer aucune occasion de placer une parole d'édification, un conseil de vertu; et lorsque les circonstances le permettaient, il engageait volontiers, avec ses interlocuteurs, des discussions en règle sur ces vérités de la religion dont il était si vivement pénétré. Il savait se maintenir dans les bornes d'une réserve si prudente, il donnait son avis avec tant de courtoisie et de bienveillance, et sa discussion était toujours remplie de tant d'aménité et de bon goût, que personne ne pouvait s'offenser d'une piété animée d'un zèle si pur. Cette propagande charitable produisit souvent des résultats aussi efficaces qu'inattendus, et, si nous ne craignions de franchir en cela les bornes de la discrétion, il ne nous serait pas difficile de citer plusieurs familles honorables qui ont été ramenées par elle à la foi, et des ministres anglicans, des plus distingués, qui lui doivent leur conversion au catholicisme.

CHAPITRE XIV.

L'INSTITUT CATHOLIQUE.

M. Cauchy alliait au génie des Euler, des Lagrange, des Laplace, des Gauss, des Jacobi, une rare bonté, une simplicité, une chaleur de cœur qu'il a conservées jusqu'à la fin de ses jours.
Paroles de M. Combes (de l'Institut).

Dévouement de Cauchy pour la jeunesse. — Son affection pour ses élèves. — Nécessité d'une œuvre pour les jeunes gens. — Les écoles en 1842. Organisation de l'Institut catholique. — Création de conférences. — Part qu'y prend Cauchy. — Rapport de la foi avec les sciences et les lettres. — Sentiments de Cauchy sur cette question. — Poésie sur une Église catholique.

Aider les jeunes gens, encourager leurs premiers travaux, suppléer à leur inexpérience par d'utiles conseils, fut toujours, pour Cauchy, l'objet de ses soins les plus assidus. Il était, du reste, admirablement doué des qualités propres à les attirer et à les persuader. La jeunesse honore naturellement ce qui est droit, pur et désintéressé ; elle sympathise avec les âmes franches, ouvertes et ardentes; elle admire les convictions profondes, les sacrifices généreux; elle trouvait tout cela dans Augustin Cauchy, et elle se plaisait à rendre hommage à son caractère et à sa vertu.

Nous avons déjà dit avec quelle abnégation il se prodiguait pour ses élèves; mais sa bonté n'était pas limitée à ses seuls disciples, il semblait que tous les jeunes gens eussent des droits à sa bienveillance. Il était accessible à

tous, sa porte leur était toujours ouverte, et, pendant la durée de son professorat, il conserva l'habitude de les réunir dans son salon une fois par semaine. En les attirant à lui, il n'était pas mû simplement par un sentiment de sympathie naturelle; il voulait surtout les rendre meilleurs et les amener, s'il était possible, à la piété par la foi. Ennemi de tout ce qui sentait la dissimulation et l'intolérance, il ne leur aurait jamais demandé d'afficher au dehors, sans conviction, les apparences de sentiments qu'ils n'auraient pas eus dans leur cœur; mais, à l'occasion, il ne manquait pas de donner à ses paroles et à ses conseils une tendance religieuse. Ce n'étaient point de longs discours ni d'ennuyeux sermons, c'étaient quelques mots dits avec bonté, c'était même une simple et gracieuse invitation à revenir; d'ailleurs, sa grande influence, sa prédication la plus efficace, était celle de l'exemple.

Ce sentiment général de bienveillance pour les jeunes gens se transformait en une vive affection lorsqu'il rencontrait chez l'un d'entre eux, non-seulement la foi et la piété du chrétien, mais encore l'amour du travail et les dons de l'intelligence. Alors il n'y avait pas de marque d'intérêt qu'il ne lui donnât, pas de démarche qu'il ne fît pour lui être utile. Sa protection s'exerçait enfin avec tant de délicatesse et de discrétion que, le plus souvent, ceux qui en étaient l'objet l'ignoraient eux-mêmes, et recueillaient, pour ainsi dire sans le savoir, les heureux effets d'une amitié qui se faisait sentir sans se montrer. Un de ses disciples, devenu depuis l'un des savants les plus éminents de notre époque, exprimait un jour à Mme la baronne Cauchy sa profonde reconnaissance pour tous les services que M. Cauchy lui avait rendus; « vous avez bien raison, lui répondit-elle, et son affection pour

vous est encore plus grande que vous ne pensez, car il y a telle circonstance où il a fait pour vous plus que ne ferait un père pour son fils. »

Mais, quel que fût son dévouement pour la jeunesse, Cauchy comprenait que des efforts personnels étaient insuffisants. Son action, limitée à un cercle restreint de jeunes gens assez heureux pour approcher de sa personne, n'atteignait pas la foule de ceux qui, moins bien partagés, ne rencontraient pas ailleurs un accueil aussi amical. N'y avait-il rien à faire pour ces derniers? Ne serait-il pas possible de créer pour eux une sorte de patronage qui, généreusement offert et volontairement accepté, produirait les meilleurs résultats? Cette question le préoccupait vivement, et il en avait cherché nombre de fois la solution, de concert avec plusieurs personnes distinguées comme lui par le talent et la piété. Telle est l'origine de l'utile établissement connu sous le nom d'*Institut catholique* ou de *Cercle du Luxembourg*, qui, depuis un nombre d'années déjà considérable, rend d'immenses services à la jeunesse studieuse et chrétienne de la capitale. Nous allons essayer de faire connaître cette œuvre importante et de caractériser la part que Cauchy prit à son organisation.

On sait assez les dangers sans nombre auxquels sont exposés les jeunes gens qui viennent, chaque année, de la province à Paris, pour compléter les études d'où dépend leur avenir. Éloignés d'une famille au sein de laquelle ils avaient été jusqu'alors entourés de bons exemples, soutenus par de sages conseils, ils se voient tout à coup transportés dans un monde nouveau dont ils soupçonnent à peine les périls. Quelle sera leur défense en face de l'ennemi? Qui pourrait dire les soucis des parents et souvent leur douleur en présence de ruines profondes,

quelquefois irréparables? Qu'on offre au contraire à ces jeunes gens un asile sûr où leurs bonnes résolutions seront sauvegardées, où ils rencontreront, au milieu de délassements honnêtes, un aliment pour l'activité de leur âge; grâce à cette aide salutaire, l'œuvre de la famille sera complétée, et bientôt, au lieu d'hommes corrompus ou déclassés, la société retrouvera des esprits ornés et des cœurs purs.

La première organisation sérieuse de l'Institut catholique remonte à l'année 1842. On traversait alors une époque où les passions anti-religieuses se déchaînaient avec violence. La propagande s'exerçait principalement parmi la jeunesse des écoles, et c'était surtout dans les cours publics du Collége de France et de la Sorbonne que la lutte éclatait vive et ardente. C'est là que les partis opposés se donnaient rendez-vous pour se compter et quelquefois pour dominer la voix du maître, et pour protester contre son enseignement, lorsqu'il ne pouvait se plier à leurs exigences. A des applaudissements frénétiques répondaient des cris presque sauvages, et souvent la leçon finissait par des tumultes indescriptibles et des scènes sans nom. La vérité et la science n'avaient plus rien à voir au milieu d'un tel tumulte, et les hommes sensés se trouvaient mal à l'aise dans cette atmosphère viciée et malsaine,

L'un des principaux objets des fondateurs de l'œuvre nouvelle fut précisément d'apporter un remède à cet abus. Sous le nom modeste de *Conférences*, on organisa des réunions dans lesquelles devaient être traitées les questions de littérature ou de science qui, par leur importance et leur actualité, offraient le plus d'intérêt. Là, il n'y aurait plus ni passions ni émeutes; les leçons seraient exposées et écoutées avec le calme et la dignité qui con-

viennent aux choses de l'esprit; enfin, le titre d'*Institut catholique*, ouvertement arboré, apprenait tout d'abord aux nouveaux venus le caractère essentiellement moral et chrétien qui devait présider à tous les travaux.

Deux comités furent formés, l'un pour les lettres, l'autre pour les sciences. Au premier de ces comités, M. Pardessus, de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, apportait l'autorité de son érudition si vaste et si sûre dans toutes les questions qui se rapportent à l'étude des lois; M. Ozanam y faisait admirer le vif éclat de son génie littéraire, la profondeur et l'originalité de ses vues, le charme de son style et de sa parole si sympathique à la jeunesse; on y rencontrait encore MM. Bérard des Glajeux, Fontaine d'Orléans, Henri de Riancey, Frédéric Lauras. Dans le Comité des Sciences, on comptait MM. Binet et Beudant, de l'Institut, M. le docteur Tessier, MM. Leroy, Cayol, Gaultier de Claubry, dont les noms sont honorablement connus parmi les savants. A côté d'eux venait se placer Augustin Cauchy, qui apportait aussi à l'œuvre naissante toute l'ardeur de son zèle. Ce fut lui qui remplit à l'origine les fonctions de secrétaire; des notes nombreuses, retrouvées dans ses papiers, donnent sur l'établissement des conférences d'intéressants détails. Deux séances préparatoires avaient eu lieu le 19 et le 26 janvier 1842; on y avait discuté les questions essentielles et arrêté les articles du règlement.

« Une jeunesse studieuse et avide de savoir, disait Cauchy, se livrait depuis plusieurs années à la culture des sciences et des lettres, sans perdre de vue la religion, qui est la première des sciences. Elle a désiré que l'expérience de ceux qui l'avaient précédée dans la carrière pût lui venir en aide. Elle a espéré que les maîtres de la science, les hommes que distinguent et des talents éprou-

vés et un attachement sincère à la foi catholique, ne refuseraient pas de lui servir de guide. Cet espoir ne sera pas trompé. Tous les Membres des deux Comités rivaliseront de zèle pour le succès d'une œuvre si utile. Tous demanderont, tous ont déjà demandé à Dieu qu'il daigne lui-même bénir des travaux qui ne sauraient manquer de tourner à sa gloire, puisqu'ils ont pour but la recherche et la propagation de la vérité. »

Des Conférences nombreuses furent immédiatement organisées; elles devaient embrasser toutes les branches des connaissances humaines : lettres, histoire, droit, physique, médecine, sciences exactes, rien ne fut oublié, et si l'on considère le nombre et le talent des hommes qui apportèrent leur concours à l'œuvre, on jugera sans doute qu'elle était née viable et en état de remplir son but élevé.

Le Président de l'association était M. le vicomte Alban de Villeneuve, de l'Académie des sciences morales et politiques. Le Comité des Sciences était dirigé par M. Cauchy; il comptait vingt-deux Membres. Aux hommes dont nous avons déjà cité les noms étaient venus se joindre MM. Coriolis, Freycinet, Auguste Saint-Hilaire, Récamier, Cruveilher, et, après eux, plusieurs jeunes gens alors au début de leur carrière et qui ont occupé depuis, dans la science, un rang distingué. Le Comité du Droit et des Lettres ne comptait pas moins de vingt-huit Membres, mais son activité se résumait surtout dans la personne de Frédéric Ozanam; le souvenir des services rendus à l'Institut catholique par cet illustre professeur a même fait donner son nom à l'une des conférences les plus goûtées et les plus suivies. Enfin, aux deux Comités primitifs, on ne tarda pas à joindre un Comité des Arts, sous la direction de M. Raoul Rochette, secrétaire perpétuel

de l'Académie des Beaux-Arts. Il y avait, chaque semaine, quatre conférences pour le droit, cinq pour les sciences, une pour la littérature et une pour les beaux-arts. On établit en outre des séances solennelles, dont les frais étaient faits par quelques-unes des illustrations de l'époque. On y entendait tour à tour l'éloquence originale et ardente du Père Lacordaire et la parole suave et sympathique du comte de Montalembert. Une autre fois, M. Eugène Boré venait raconter, dans un langage simple et ému, les péripéties de ses voyages en Orient et les commencements de sa vie de missionnaire.

Il ne saurait ici être question de rendre compte des travaux de l'Institut catholique; il m'a semblé cependant qu'il ne serait pas sans intérêt d'en donner au moins une idée en choisissant comme exemple un travail que Cauchy avait composé pour une des réunions et dont le manuscrit a été retrouvé dans ses papiers. Cette citation offrira un nouveau témoignage de la hauteur à laquelle il élevait ses vues.

« Sur quelques préjugés des poëtes et des littérateurs contre les physiciens et les géomètres. » Tel est le titre de cet écrit. « On entend souvent répéter dans le monde, dit l'auteur, que les sciences exactes dessèchent l'esprit et le cœur; les sciences naturelles et la médecine ne sont pas même exemptes de ce reproche, et il est clair que toutes les sciences à leur tour, même les plus sublimes, devront être, sans exception, condamnées au même titre..... L'exactitude n'est-elle pas en effet un caractère essentiel, nécessaire de toute véritable science? L'objet de toute science n'est-il pas la recherche ou la connaissance exacte de la vérité? L'exacte, l'infaillible certitude des vérités révélées n'est-elle pas ce qui établit une différence si marquée entre les invariables enseignements de

l'Église catholique, dont l'autorité se fonde sur la parole même de Dieu, et les mobiles croyances de ceux qui ont le malheur de prendre pour guide et pour appui les caprices fugitifs de la raison individuelle ou le flot inconstant des opinions humaines? L'exacte vérité n'est-elle pas ce qui distingue la vraie et la fausse philosophie, l'histoire et le roman? N'est-elle pas ce que nous recherchons, ce que nous aimons à retrouver dans les plus belles productions de l'esprit humain, même dans la littérature, même dans la poésie? Le choix du mot propre à exprimer nettement la pensée, la clarté du discours, la fidèle peinture du genre humain, ne sont-ils pas les éléments essentiels de la perfection à laquelle s'élèvent les vers de Racine? Les fictions mêmes, pour nous plaire, ne doivent-elles pas nous offrir une image sensible de la vérité? L'exactitude des descriptions, la reproduction fidèle des grands tableaux que nous offre la nature, n'est-elle pas ce qui nous charme dans Virgile ou dans Homère? Et sans l'exactitude, sans la candeur naïve avec laquelle l'inimitable la Fontaine nous raconte, sous des noms supposés, notre propre histoire, ses fables auraient-elles pour nous tant d'attraits? »

Si l'étude des sciences dessèche le cœur de certains hommes, la cause en est ailleurs. « L'homme, hélas! peut abuser de tout, il lui arrive trop souvent de tourner les dons de Dieu contre Dieu lui-même, les créatures contre le créateur; il peut abuser de l'analyse, de la physique, des sciences naturelles, comme il abuse de la création, comme il abuse de la raison, comme il abuse de la philosophie. Tout, dans le monde des âmes comme dans celui des corps, a été disposé, suivant la parole des livres saints, avec nombre, poids et mesure. Si Dieu se retire, aussitôt ces caractères divins disparaissent et

tout retombe dans le chaos. Pour nous dépeindre le séjour des éternelles douleurs, la Sainte Écriture affirme que c'est un lieu d'où tout ordre est banni : *ubi nullus ordo et sempiternus horror inhabitat.*

« C'est précisément parce qu'elle est exacte et vraie que la religion chrétienne est si éminemment favorable aux progrès des sciences et au développement des plus nobles facultés de notre intelligence. C'est en éclairant les esprits, c'est en ranimant dans les cœurs l'amour de la vérité, qu'elle inspire le génie, qu'elle provoque les méditations du savant, l'enthousiasme divin de l'orateur et du poëte, et les empêche de se briser contre de funestes écueils. »

Des écrivains distingués ont, il est vrai, contredit, ou du moins mis en doute ces assertions, mais Cauchy n'hésite pas à protester contre leurs conclusions. Il en est un surtout contre lequel il s'élève avec énergie : c'est le satirique Boileau. Cet esprit juste, mais sec, qui juge tout avec une rigueur froide et inexorable, cette pointe d'esprit fine et acérée qui dissèque les œuvres de l'intelligence comme un chirurgien fait des organes du corps, excite vivement la verve du géomètre chrétien. C'est Boileau qui condamne sans pitié quiconque essaye de célébrer en vers les sublimes mystères de la foi; c'est Boileau qui écrit cet étrange distique, où les mots se choquent et se contredisent :

> L'Évangile à nos yeux n'offre de tous côtés
> Que pénitence à faire et tourments mérités.

Quoi! l'Évangile, la *Bonne Nouvelle*, n'enseignerait pas autre chose? L'Évangile, la plus grande preuve de la miséricorde de Dieu, n'inviterait pas les hommes à l'amour? Ah! illustre critique, on voit bien que vous vivez

du temps des *Provinciales* et que vous comptez Port-Royal parmi vos amis !

« Au reste, ajoute Cauchy, la thèse que soutenait Boileau cesse, de nos jours, d'être accueillie avec faveur. Notre siècle a une tendance manifeste à se débarrasser de tout l'appareil mythologique. Il se rit de la colère dont le législateur du Parnasse paraissait animé contre tout poëte qui, méprisant du fond du cœur les superstitions païennes, ne faisait pas semblant, dans ses vers, d'adorer tout, excepté Dieu lui-même. Les déesses du paganisme, vieilles ou rajeunies, fardées ou non fardées, pouvaient convenir encore à la philosophie railleuse du XVIIIe siècle, qui se moquait de tout et ne croyait à rien. Aujourd'hui l'on préfère les raisons à des sarcasmes, et l'on recherche plus sérieusement la vérité. On serait disposé volontiers, non point à faire passer sous nos yeux

.....Thémis, sans bandeau, ni balance,

mais à ne point la mettre du tout en scène et à laisser la balance aux mains de « Celui par qui règnent les rois et » de qui relèvent tous les empires. » On sent au fond de l'âme, et souvent même sans s'en rendre compte, qu'il n'est pas de la dignité des peuples chrétiens de rétrograder jusqu'à la barbarie des spectateurs du Cirque, jusqu'aux ténèbres de l'idolâtrie, et le *Génie du Christianisme*, les *Méditations de Lamartine* sont préférées à Flore, à Pomone, à Mercure, même à

.....la Guerre au front d'airain,
Même au Temps qui s'enfuit, une horloge à la main.

» Oui, c'est parce qu'elle est vérité, que la religion chrétienne a toujours et partout éclairé les esprits, développé les intelligences, qu'elle a fait éclore tant de pro-

ductions immortelles des sciences, de la littérature et des arts, les chefs-d'œuvre de Michel-Ange et de Raphaël, les divines poésies de Corneille et de Racine, du Tasse et de Milton; qu'elle nous a terrassés sous l'éloquence foudroyante de l'aigle de Meaux; qu'elle a revêtu de tant de charmes les chants mélodieux et tendres du cygne de Cambrai. C'est parce qu'elle est exacte et vraie qu'elle a présidé aux méditations sublimes des Augustin, des Descartes, des Newton, des Fermat, des Maclaurin, des Pascal, des Linnée, des Euler, des Copernic, des Tycho-Brahé, des Cassini, de ces grands hommes de tous les siècles qui n'avaient pas la folle ambition de détrôner le Tout-Puissant et de bouleverser les empires, mais qui, dans la contemplation de la nature et des lois admirables établies par le créateur, trouvaient sans cesse de nouveaux motifs de bénir et d'adorer l'auteur de tant de merveilles. »

Mais ce n'est pas assez pour Cauchy de plaider avec éloquence la cause des sciences : il veut encore, par son exemple personnel, prouver qu'on peut très-bien allier au génie de la Géométrie et de l'Analyse le goût de la littérature et de la poésie. « Ce sera répondre à votre attente, ajoute-t-il, ce sera terminer, comme il convient, la discussion que j'ai soulevée, ce sera montrer combien j'ai à cœur de détruire les préventions hostiles aux géomètres, que de dérober encore ici quelques moments à l'étude de la géométrie pour les consacrer à la louange

> De Celui qui sait tout et qui règne en tous lieux,
> De ce Dieu qui créa, qui racheta le monde,
> Qui commande aux enfers et se révèle aux cieux.

« Dans la dernière séance, j'avais pris pour sujet d'une épître en vers quelques-unes des merveilles de la créa-

tion. Je vais aujourd'hui tenter de célébrer les merveilles plus étonnantes encore que nous révèle la foi catholique. Pour être plus sûr de ne pas m'égarer dans ma route, je vais m'efforcer de faire passer dans notre langue le sublime cantique dans lequel l'Église elle-même raconte la gloire des temples du Dieu vivant. Je ne me suis point dissimulé la difficulté de la tâche que je m'impose. J'avais surtout à lutter contre l'énergique précision du vers latin :

Orbe parvo se coarctans;

et de ces autres vers :

Ultor astat cum flagellis
Puniens sontes Deus.

« La bienveillance avec laquelle vous avez accueilli ma *Leçon d'Astronomie*, me donne lieu d'espérer que cette fois encore vous me tiendrez compte de ma bonne volonté. Le sujet de mes vers est aujourd'hui : *Un Temple chrétien*, ou plutôt, afin qu'on ne puisse aucunement se méprendre sur ma pensée : *Une Église catholique* (1) :

UNE ÉGLISE CATHOLIQUE.

Ici descend pour nous le maître du tonnerre,
Holocauste d'amour, offert sur son autel;
Il ouvre ici le ciel aux enfants de la terre,
Ici, prêtre et victime, habite l'Éternel.

Quel temple! Quel autel! Cette gloire infinie,
Que ne peut contenir l'immensité des cieux,
Sous le disque adoré d'une muette hostie
S'enferme, s'enveloppe et se voile à nos yeux.

---

(1) Traduction libre de l'hymne de la Dédicace :

« Ecce sedes hic Tonantis, etc. »

Ici dans un cœur pur comme il aime à descendre,
Ce Dieu dont la substance à l'homme vient s'unir!
Ici, brûlant pour nous de l'amour le plus tendre,
Il recherche des fils qu'il se plaît à bénir.

Vous dont l'iniquité déshonore la vie,
Fuyez; le bras de Dieu terrasse un fol orgueil.
Il vous flagellerait si votre audace impie
De la porte du temple allait franchir le seuil.

Gloire, gloire éternelle à la Trinité sainte!
Au Père, au divin Fils! Gloire à l'Esprit de paix
Qui, bannissant des cœurs la tristesse et la crainte,
Dans ce temple vivant veut régner à jamais! »

Ajoutons, en terminant, que les réunions de l'Institut catholique n'ont pas cessé d'exercer sur la jeunesse la plus heureuse influence. La meilleure preuve de l'utilité pratique de cette institution, c'est son extension et sa durée prolongée au milieu de circonstances difficiles. En 1848, les événements politiques, qui avaient porté partout le trouble, faillirent en compromettre l'existence; il y eut alors une interruption regrettable, mais momentanée. Des hommes habiles et dévoués ne tardèrent pas à relever une œuvre si utile, et se firent un honneur de continuer les excellentes traditions de leurs devanciers.

CHAPITRE XV.

L'ŒUVRE POUR L'OBSERVATION DU DIMANCHE.

Sabbatum propter hominem factum est.
SAINT MARC, II, 27.

Nécessité de l'Œuvre. — Son but moral et pratique. — La liberté du dimanche. — Organisation de l'Œuvre. — Association des commerçants de Paris. — Difficultés d'exécution.

La division de l'année en semaines est aussi ancienne que le monde; nos livres sacrés lui attribuent une origine divine, et les incrédules eux-mêmes, sans pouvoir en donner la raison, sont bien obligés de reconnaître que, parmi toutes les institutions humaines, il n'en est pas de plus constante et de plus universelle. On la rencontre chez tous les peuples; partout on retrouve une période de temps terminée par un jour consacré à la religion et au repos. Les chrétiens observent le dimanche, tandis que le samedi est le jour férié des juifs, et le vendredi celui des musulmans; mais le principe est toujours le même. On sait, du reste, combien cette coutume est généralement respectée dans la plupart des pays étrangers; en Angleterre même, l'observation du dimanche est tellement rigoureuse qu'elle semble aller souvent jusqu'à l'excès. La France est peut-être le seul pays chrétien où cette observation soit presque tombée en désuétude dans les mœurs, bien qu'elle reste écrite dans nos lois. Il est remarquable en effet que, pour ce qui concerne les affaires publiques,

et notamment l'administration de la justice civile, à tous les degrés de juridiction, le dimanche est, sous le régime nouveau, comme il l'était sous l'ancien, un jour légal de repos. Nos codes frappent de nullité tous les actes judiciaires qui, hors le cas d'urgence, seraient rendus ce jour-là. Il y a plus : la loi du 18 novembre 1814, qui avait rendu la loi du chômage du dimanche civilement obligatoire pour tous les actes extérieurs du commerce et de l'industrie privée, n'a jamais été formellement abrogée par une loi contraire ; mais par suite d'une tolérance qui est plus soucieuse de céder devant les difficultés d'exécution que de les résoudre, l'État a fini par ne plus revendiquer ses droits. La liberté la plus complète a été rendue aux particuliers en cette matière, qui est retombée en fait, sinon en droit, sous l'empire exclusif du for intime de la conscience.

Ce n'est pas ici le lieu de rechercher les causes de cette déviation des mœurs, qui date évidemment de l'époque où tout culte public fut interrompu dans notre France. La question est de savoir si notre génération s'est bien trouvée d'avoir ainsi rompu avec les anciennes et respectables traditions du passé. Pour peu qu'on veuille y réfléchir, on verra qu'il en est résulté, dans la société, de profondes perturbations. On traite souvent avec trop de légèreté ce grave sujet, et cependant des publicistes distingués, des philosophes éminents s'en sont vivement préoccupés ; ils ont fait ressortir avec toute l'autorité de leur talent et de leur science, et même en dehors de toute préoccupation religieuse, combien la morale et le bien-être public avaient eu à souffrir de l'oubli de la loi du dimanche.

Cauchy fut aussi conduit, de son côté, à s'occuper de cette importante question. Il le fit avec cet esprit actif et

pratique qu'il apportait en toutes choses, et, de concert avec plusieurs personnes honorables, il travailla à fonder, pour cet objet, une œuvre spéciale. On a recueilli dans ses papiers des documents nombreux qui montrent avec quel zèle il se dévoua à son organisation; on y trouve, en outre, la preuve que cette œuvre délicate fut une de celles qui exercèrent le plus son esprit charitable.

Une chose le frappe tout d'abord : c'est la dure condition du commerçant « qui est cloué, dit-il, dans son magasin comme dans une prison. Il n'a jamais un instant de relâche; il ne s'appartient plus à lui-même; il est devenu l'homme lige, l'esclave du chaland dont il est destiné à subir tous les caprices. En vain aura-t-il travaillé comme un mercenaire, avec ses commis, pendant une longue semaine, en vain aura-t-il mérité par là d'avoir au moins son dimanche à lui, et de recouvrer sa liberté dans ce septième jour, signalé comme un jour de repos par toutes les lois divines et humaines; la liberté du dimanche n'existera pas pour lui. Jamais il ne verra luire un jour béni où il puisse réparer ses forces épuisées, s'ennoblir à ses propres yeux par l'exercice de ses facultés intellectuelles, vivre de la vie de famille, prendre avec les siens d'utiles et salutaires délassements, s'abandonner aux doux épanchements de l'amitié, s'occuper de l'éducation de ses enfants, leur faire quelques lectures propres à les instruire et à leur inspirer l'amour de l'étude et du devoir.

» Que serait-ce maintenant, si l'on se transportait dans les grands centres industriels, si l'on pénétrait dans ces immenses usines, dans ces mines ténébreuses où l'homme, où l'enfant lui-même, sont réduits à une condition pire, à certains égards, que celle des esclaves de l'antiquité! »

Pour mieux réussir dans leur dessein, les fondateurs de l'Œuvre nouvelle commencèrent par s'assurer, dans la Capitale, la coopération d'un certain nombre de commerçants capables d'en comprendre l'heureuse portée et assez haut placés pour que leur exemple pût entraîner les autres. MM. Salleron et Bisson, directeurs des vastes magasins des *Villes de France*, furent des premiers à promettre leur concours, et ils furent bientôt imités par une foule de commerçants des quartiers les plus fréquentés de Paris. Le samedi 11 mars 1854, une grande réunion eut lieu dans l'une des salles de l'établissement des *Villes de France*, pour aviser aux moyens de faire connaître l'œuvre et de la propager. Un rapport fait par Cauchy constatait que d'importants résultats avaient été obtenus : « Déjà, non-seulement sur la rive gauche, mais encore sur la rive droite de la Seine, un grand nombre de consommateurs se sont engagés à ne plus acheter le dimanche. Déjà même, les commerçants du quartier industriel par excellence, de celui qui confine à la Bourse et au Palais-Royal, ont manifesté hautement le désir de reconquérir ce jour de liberté. »

Mais comment réunir dans un commun accord tant de négociants divisés d'intérêts et de croyances? Il n'était pas possible de présenter la question au point de vue purement religieux ; demander non-seulement le repos, mais encore la sanctification du dimanche à une foule d'hommes qui, pour la plupart, n'en auraient pas compris l'importance ni même senti le besoin, c'eût été s'exposer à manquer complétement le but. Il fallait surtout présenter l'œuvre par son côté pratique et faire ressortir tout d'abord en quoi elle importait aux plus chers intérêts de chacun. *Association pour la liberté du dimanche :* tel est le titre qui fut adopté et qui répondait en effet le

mieux à la situation des esprits. En invitant les hommes à conquérir une liberté nouvelle et sérieuse, on est toujours sûr, à notre époque, de réussir ou du moins de se faire écouter. Mais il y a plus, ce titre était le résumé et le fond même de la question.

Eh quoi! dira-t-on peut-être, est-ce que chacun n'est pas libre sous ce rapport d'agir comme il l'entend? N'est-il pas loisible au premier venu de travailler ou de ne pas travailler le dimanche, si cela lui convient? Réclamer la liberté du dimanche, n'est-ce pas poursuivre un but imaginaire? Malheureusement non. Pour s'édifier sur ce point, il suffirait de consulter un de ces mercenaires qui, courbés incessamment sous le poids du travail et de la fatigue, aspirent impatiemment à trouver par intervalle quelques moments de repos. C'est sans doute au nom de la liberté et en haine du despotisme que certains hommes ont secoué, les premiers, le joug de l'observation du dimanche, et voilà qu'une tyrannie cent fois pire pèse maintenant sur eux. Le commerçant qui ferme le dimanche est menacé de perdre ses pratiques, qui s'adresseront désormais à son voisin; l'employé, l'ouvrier qui refusera son temps et son travail, sera impitoyablement congédié et se verra exposé, lui et sa famille, à tomber dans la misère. Qu'on parle après cela de la liberté du dimanche!

Il y eut probablement, à l'origine, de la part des novateurs, un calcul intéressé. Les ateliers, les fabriques marchaient autrefois six jours de la semaine et fermaient le dimanche; y ajouter un septième jour, n'était-ce pas augmenter tout d'un coup la fabrication d'un sixième et accroître subitement les bénéfices de plus de quinze pour cent? Ce calcul semblait justifié par toutes les théories économiques; mais la loi morale, qui ne laisse jamais

impunie la violation d'un grand principe, est venue donner à ce raisonnement un éclatant démenti. On a méprisé le précepte du dimanche et il a fallu subir la honteuse nécessité du lundi. Ce jour-là, loin de réparer ses forces, l'ouvrier achèvera de les épuiser dans le désordre, et, le lendemain, il rentrera dans l'atelier, abruti et incapable même de reprendre son travail accoutumé. Ainsi la violation du précepte, loin d'avoir produit un gain, aura été, pour le maître, la cause d'un dommage sensible, et, pour l'ouvrier, l'occasion d'une démoralisation funeste. On peut donc dire que Cauchy pénétrait au cœur même de la question lorsqu'il disait en s'adressant aux commerçants réunis : « La liberté du dimanche est nécessaire, non-seulement au bien-être, à la vie des commerçants, mais encore à la sécurité de l'industrie et du commerce qu'elle peut sauvegarder de l'émeute et des plus grands périls. En effet, si cette liberté est rendue au commerçant, bientôt l'ouvrier voudra aussi en avoir sa part; bientôt il cessera de travailler le dimanche, bientôt il cessera d'aller le lundi à la barrière dépenser dans l'orgie le modique salaire qui doit payer le pain de sa femme et de ses enfants; il reprendra des habitudes d'ordre et d'économie; il connaîtra la caisse d'épargne, et rarement on le rencontrera dans les grèves ou parmi les faiseurs de barricades. »

A la suite de quelques réunions préparatoires, un Comité fut formé; on répandit des circulaires et des affiches signées par les négociants les plus considérables et les plus honorés; les appels se propagèrent de proche en proche, et une vaste association s'organisa sous l'action mutuelle des intéressés eux-mêmes. De nombreuses adhésions répondirent à ces pressantes sollicitations, et les habitués de la Bourse et du Palais-Royal furent très-

étonnés un jour de voir ces boutiques qui s'étaient subitement fermées à la voix du savant.

Un grand bien fut ainsi réalisé; malheureusement il ne fut ni aussi complet, ni aussi général que Cauchy l'aurait désiré. Il y avait, dans la foule des hommes auxquels il s'adressait, une trop grande variété de sentiments et de mobiles; si quelques-uns étaient animés d'une pensée vraiment morale et religieuse, d'autres n'avaient en vue que des motifs beaucoup moins élevés. Ils voulaient bien fermer leurs magasins le dimanche, mais à la condition que leurs voisins commenceraient par donner l'exemple, et, retenus par le respect humain, ils refusaient d'inscrire leurs noms sur les listes d'appel; d'autres enfin restaient sourds à toute proposition et arrêtaient par leur inertie l'élan des premiers associés.

Il en résultait pour la direction de l'Œuvre elle-même une position délicate et embarrassée. Le zèle de Cauchy, bien qu'habitué à compter pour peu de chose les obstacles, se trouvait ici comme arrêté par les difficultés inhérentes à la nature du sujet. Sa pensée, qui se formulait d'ordinaire avec tant d'aisance lorsqu'il s'agissait de tendre à un but nettement indiqué, devenait hésitante et indécise sur le choix des formes à employer pour faire accepter une détermination commune par une foule si partagée de vues, de sentiments, de mobiles et d'intérêts. Dans ses notes on retrouve à chaque pas le catholique sincère et ardent qui voudrait amener ses auditeurs, non-seulement à reconquérir la liberté du dimanche, mais surtout à le considérer comme un jour sanctifié par le repos et la prière; et cependant, ce but élevé, Cauchy n'ose le proposer ouvertement, de peur de compromettre le succès de l'Œuvre. Il prévoit les scrupules des faibles, les fluctuations des timides; il ne veut point examiner

si les motifs qui ont dirigé tels membres de l'Association sont tirés de la religion et de la morale ou bien de l'hygiène et de la philosophie; il se contente de leur exposer les précieux avantages de cette liberté dont la riche et industrieuse Angleterre recueille de si salutaires effets, et de les décider par la considération du bien public et par une appréciation intelligente de leurs propres intérêts. « Nous resterons étrangers, ajoute-t-il, à des secrets que nous n'avons pas le droit de pénétrer. Il nous suffit de savoir que les divers motifs allégués par divers membres de la réunion ont tous abouti à une conclusion unique; que chacun des orateurs a invoqué ou l'un de ces motifs, ou tous ces motifs à la fois, pour démontrer la nécessité de rendre le plus tôt possible aux commerçants la liberté désirée. Tous voudront être fidèles à leur parole; tous peut-être voudront écrire leurs noms à côté des nôtres pour déterminer, par la vue d'un grand nombre de signatures, les habitants des autres rues à suivre leur exemple. Ils pourront ainsi se flatter, non-seulement d'avoir sauvegardé leurs intérêts les plus chers, mais encore d'avoir rendu à l'intérêt général un service inappréciable, d'avoir concouru puissamment à une œuvre de haute civilisation. Toutefois, comme dans ce concours même, tout doit être volontaire, spontané, ceux qui, par des considérations particulières, hésiteraient à joindre leurs signatures aux nôtres, pourront se borner à fermer leurs magasins sans nous donner leurs noms. »

Malgré ses bons effets, l'OEuvre pour l'observation du Dimanche n'eut donc pas tous les heureux résultats qu'on était en droit d'espérer; il ne nous a pas moins paru utile d'entrer à ce sujet dans quelques détails, soit en raison de l'importance de l'OEuvre elle-même, soit à cause des motifs élevés qui, dans cette circonstance,

inspiraient Cauchy. C'était assurément une pensée généreuse et vraiment libérale que d'entreprendre d'affranchir le commerce et l'industrie d'une de leurs plus lourdes servitudes, et, même après un succès incomplet, il était digne d'une grande âme d'en avoir conçu le projet et poursuivi la réalisation.

CHAPITRE XVI.

L'OEUVRE DES ÉCOLES D'ORIENT.

Au milieu de la sécheresse puissante de ses chiffres et de ses prodigieux calculs, il avait l'âme tendre comme une sœur de charité.

Mgr DUPANLOUP.

Origine et but de l'OEuvre. — La guerre de Crimée. — Part de Cauchy dans la fondation de l'OEuvre des Écoles; témoignages divers. — Difficultés de la question d'Orient. — Infériorité du clergé grec. — Documents divers. — M. Eugène Boré. — L'OEuvre des Écoles d'Orient et l'Institut. — Difficultés d'exécution. — Résultats obtenus.

L'OEuvre des Écoles d'Orient, fondée en 1856, ne compte pas encore douze ans d'existence, et cependant, malgré son développement extraordinaire, malgré les vives sympathies dont elle a été partout l'objet, on connaît peu son origine, et tel de ceux qui la servent aujourd'hui avec le plus de zèle et d'intelligence serait très-embarrassé d'en retracer l'histoire. Il ne faut pas s'en étonner. Les œuvres vraiment chrétiennes ont toutes pour fondement l'humilité; plus leur avenir est grand, plus leurs origines sont modestes et obscures. Il en est de ces œuvres comme de ces pieux monuments dont on admire la magnifique structure, mais dont les assises reposent profondément sous terre. Des générations d'ouvriers inconnus y ont consumé leur vie, et il ne reste maintenant que le souvenir de leur dévouement avec le fruit de leur courageux labeur. Quelquefois cependant,

Dieu, qui a voulu que ces ouvriers fussent ignorés de leur vivant afin de leur laisser tout le mérite du sacrifice, permet plus tard que leurs noms sortent de l'oubli, lorsqu'il doit en résulter des exemples de nature à instruire le monde et à encourager les âmes chrétiennes.

L'Œuvre des Écoles d'Orient nous offre précisément un de ces beaux exemples, et il y a, dans son origine comme dans son établissement, un utile enseignement pour notre siècle. Elle est, d'un autre côté, particulièrement remarquable en ce que ses fondateurs furent non-seulement des chrétiens pieux et fervents, mais encore des hommes illustres par leur science et leur talent. Il était réservé au génie, appuyé sur la charité, de se faire humble et petit pour procurer aux populations du Levant le bienfait de l'instruction et pour leur faire accepter par ce moyen le bienfait plus précieux encore de la foi et de la civilisation chrétienne. Il ne saurait être ici question d'examiner en détail la part qui revient à chacun de ses honorables fondateurs; le travail serait long autant qu'inutile; d'ailleurs la plupart d'entre eux vivent encore, et leur modestie s'alarmerait de l'indiscrétion d'une telle recherche. Mais parmi tous ces noms également chers à la science et à la religion, il en est un qui appartient aujourd'hui à l'histoire et sur lequel il convient d'insister à cause de son importance : ce nom est encore celui d'Augustin Cauchy. C'est en effet Cauchy qui conçut le premier l'idée de l'Œuvre nouvelle et qui contribua le plus à l'organisation.

On était alors en 1855, au plus fort de la guerre d'Orient, de cette guerre gigantesque que la France était allée soutenir à huit cents lieues de ses frontières. Chaque courrier apportait quelque épisode émouvant de ce drame terrible, et l'on attendait avec anxiété le résultat

de ces prodigieux travaux qui devaient nous assurer un prochain et définitif triomphe.

Mais quel devait être le fruit de cette laborieuse entreprise? S'agissait-il uniquement de vaincre une armée redoutable et sans cesse renouvelée ou de forcer les remparts d'une ville réputée imprenable? de sauvegarder une Puissance en ruines et de réduire par les armes un empire dont l'ambition menaçait de rompre l'équilibre européen? Personne, en France, ne mettait en doute le succès prochain de nos efforts, et déjà l'on prévoyait le moment où le canon des batailles aurait cessé de retentir. Mais il est des difficultés que les armes sont impuissantes à résoudre. Le rôle de la politique devait commencer après la victoire, et il n'était pas moins ardu. Il fallait remédier aux désordres du passé et en même temps conjurer les périls de l'avenir; il fallait imposer un double frein à l'ambition moscovite et au fanatisme musulman; il fallait surtout préparer la régénération de peuples abrutis par la loi du Coran, et, sous ce rapport, on peut dire que la question d'Orient subsistait tout entière.

Tel est le problème difficile qui se présentait à tous les esprits et que les plus éclairés désespéraient de résoudre. Cauchy en était vivement impressionné; c'était devenu pour lui une préoccupation de chaque jour, de chaque instant, et c'est à la suite de longues réflexions qu'il en vint à concevoir l'idée de créer une œuvre dont l'objet serait de compléter et de consolider, par la restauration des études et la diffusion des plus saines doctrines, l'œuvre d'émancipation si admirablement commencée par les armes de la France.

Dans cette circonstance, comme dans beaucoup d'autres, les Pères Jésuites furent les premiers confidents de ses pensées, et voici en quels termes le Révérend Père de

Damas parle de l'origine de l'OEuvre qu'il connaît si bien et dont il est l'un des principaux soutiens (1) :

« L'OEuvre des Écoles d'Orient est née en 1855, lorsque la question des lieux saints emportait les cœurs, encore plus que les masses armées, au delà de la Méditerranée.

» La première pensée en est due à M. le baron Cauchy.

» L'Europe entière avait les yeux tournés vers l'Orient, attentive au grand drame qui se dénouait sous les murs de Sébastopol.

» On évoquait les beaux souvenirs du passé; on parlait des croisades; on rappelait avec orgueil les victoires de Godefroy de Bouillon et des soldats de la croix.

» Aux yeux de tout homme sensé, le rôle des nations de l'Occident ne pouvait se borner à prolonger de quelques jours la vie d'un empire en décrépitude.

» Les grands sacrifices pécuniaires, le dévouement de tant de familles, l'immolation volontaire de tant de jeunes hommes méritaient mieux que cela.

» La régénération morale des peuples asservis à la loi du Coran, le triomphe de l'Évangile autour du berceau et du sépulcre de Jésus-Christ, étaient la seule compensation acceptable pour ces flots de sang versé.

» Mais comment y parvenir?

» M. Cauchy essaya de résoudre le problème. Il fit appel aux hommes de cœur. On délibéra. On crut avoir trouvé dans la création de l'OEuvre des Écoles d'Orient une réponse au cri de la conscience universelle de l'Europe.

» A-t-on réussi?

» L'avenir seul pourra le dire pleinement; mais dès aujourd'hui l'expérience des missionnaires, la logique du bon sens paraissent justifier la pensée du fondateur, et,

---

(1) *Manuel des Dames patronesses;* 1860, p. 9.

toute jeune encore, l'OEuvre des Écoles d'Orient présente des résultats satisfaisants. »

L'initiative de Cauchy se trouve encore établie par le témoignage public de Mgr Lavigerie, archevêque d'Alger, ancien Directeur de l'OEuvre. Dans son Rapport général pour l'année 1857, on lit ce qui suit : « Notre premier devoir est de rendre au savant illustre, à l'homme de bien, au chrétien sincère qui le premier conçut la pensée de cette OEuvre, l'hommage de religieux souvenir auquel il a droit. Dieu nous a enlevé M. le baron Augustin Cauchy, dont le zèle avait déjà tant fait pour le succès de l'entreprise à laquelle il nous avait associés, et que nous avons conservée comme le précieux héritage d'une mémoire si noble et si pure. Notre seule consolation est de penser qu'au lieu où il est maintenant, il nous reste toujours uni par la prière et demande à Dieu pour nous la force de mener à bon terme l'œuvre qu'il a commencée. »

Citons enfin les remarquables paroles par lesquelles l'éloquent évêque d'Orléans a caractérisé l'origine de l'OEuvre. C'était à Rome, en juin 1862, au milieu de ces fêtes dont le monde chrétien ne perdra pas le souvenir. Mgr Dupanloup s'était chargé de prononcer un discours en faveur des églises d'Orient, devant une assemblée où siégeaient des évêques réunis des contrées les plus éloignées. « Une grande OEuvre, disait-il, une OEuvre providentielle a été fondée; et c'est en France, Messieurs, et, chose remarquable! c'est au sein de l'Institut de France, dans le cœur d'un savant qui fut l'un des premiers mathématiciens de l'Europe, et aussi l'un des premiers chrétiens du monde, l'illustre et regrettable M. Cauchy; je suis heureux et fier de prononcer ici son nom, car la reconnaissance pour les hommes qui ont bien mérité de l'Église est un doux et grand devoir pour tous;

c'est dans le cœur de ce grand homme de bien qu'est née cette Œuvre des Écoles d'Orient; et on peut dire qu'il s'y est dévoué jusqu'à la mort, car au milieu de la sécheresse puissante de ses chiffres et de ses prodigieux calculs, il avait l'âme tendre comme une sœur de charité. »

Cauchy devait donc être le promoteur de cette difficile entreprise, et, ce qui montre combien les voies de Dieu diffèrent des nôtres, c'est que ce Géomètre, si habile d'ailleurs dans les spéculations scientifiques, pouvait paraître moins que personne préparé à une telle mission. Il y avait dans l'héroïque armée de Crimée une foule de militaires aussi fervents chrétiens que vaillants soldats; il ne manquait pas d'ailleurs, en France, d'hommes éminents par leur esprit de charité, qui connaissaient parfaitement l'Orient depuis de longues années, qui l'avaient parcouru et exploré en tous sens et qui avaient étudié la question sur les lieux mêmes. Il y avait enfin des missionnaires dévoués qui dépensaient depuis longtemps leur activité sur cette terre ingrate, qui l'arrosaient de leurs sueurs, souvent même de leur sang. Voilà les hommes qui semblaient naturellement appelés à créer l'Œuvre des Écoles. Cauchy, au contraire, ne connaissait pas l'Orient; jamais il ne l'avait visité, jamais il n'avait étudié de près et par lui-même les besoins des populations. Mais les militaires et les missionnaires étaient loin de la France, occupés au jour le jour à accomplir leur tâche d'abnégation et de sacrifice; ailleurs on était découragé par la vue trop distincte du mal et par le sentiment profond de l'impossibilité d'y porter remède en usant des moyens purement humains. Cauchy se trouvait, il est vrai, éloigné du théâtre de l'action, mais il était à Paris, au centre même où toutes les œuvres

grandes et chrétiennes prennent naissance; du reste, la sûreté de ses vues et l'activité de son zèle suppléèrent à ce qui pouvait lui manquer du côté de l'expérience. Mais afin de mieux comprendre l'utilité de l'Œuvre des Écoles d'Orient et l'importance des résultats obtenus, il est nécessaire de dire d'abord quelques mots des difficultés de l'entreprise.

Ces difficultés tiennent sans doute en partie à la politique, mais elles sont surtout de l'ordre religieux. Presque tous les maux des populations chrétiennes du Levant remontent, comme à leur source première, à ce schisme fatal qui, depuis de longs siècles, les a séparées du principe de la vie et les a isolées des seules puissances capables de les protéger. Après que l'invasion musulmane eut pénétré en Europe et lorsque son flot toujours croissant menaçait de tout engloutir, elle trouva chez les peuples unis de communion avec Rome une résistance énergique, qui, après des alternatives de succès et de revers, finit par demeurer triomphante. Rome fut vraiment l'âme de cette lutte terrible; à sa voix l'Europe se leva tout entière; des armées innombrables se précipitèrent sur l'Asie avec un élan irrésistible, et ne s'arrêtèrent que lorsque l'ennemi eut été définitivement refoulé. Les peuples séparés de Rome par le schisme restèrent seuls étrangers à ce grand mouvement qui commença à Pierre-l'Ermite pour se terminer à la bataille de Lépante; souvent même ils compromirent, par leurs dispositions hostiles, les expéditions les mieux combinées. Eux seuls aussi succombèrent; on les vit s'affaisser sous le joug musulman. Depuis cette époque, ils expient leur faute dans une dure servitude; et la chute même de l'empire ottoman ne suffirait pas pour amener leur délivrance. Si les Turcs s'en vont, les Russes s'avancent, et rien ne

prouve qu'ils aient renoncé à réaliser le testament de Pierre le Grand. Les chrétiens d'Orient ne feraient alors qu'échanger une domination tyrannique et spoliatrice, mais dont l'inertie et l'incapacité leur laissent du moins certaines franchises religieuses et municipales, contre une domination envahissante, qui, unissant l'astuce à la violence, s'empare insensiblement de tout et finit par peser lourdement jusque sur les consciences.

Et maintenant, que porter à ces populations? où trouver un point d'appui pour les relever de leur état de décadence? Sera-ce le sentiment religieux? Loin de leur faire défaut, ce sentiment est souvent exalté jusqu'au fanatisme; mais ce qui manque surtout, c'est l'instruction. Si le savoir ne constitue pas, à lui seul, la valeur morale d'un peuple, il n'en est pas moins un des éléments essentiels de sa dignité et de sa force. Partout l'ignorance apparaît, en Orient surtout, comme une source intarissable de misère et de vice. Les ténèbres y sont d'autant plus irrémédiables qu'elles ont atteint ceux mêmes qui ont charge d'âmes. Le clergé grec, même dans la partie demeurée fidèle, est descendu à un degré d'incapacité vraiment affligeant; on citerait à peine quelques honorables exceptions. Ce clergé, où brillèrent autrefois tant d'hommes illustres que l'Église compte au premier rang de ses Pères et de ses docteurs, a vu tout à coup sa séve se tarir depuis que la branche s'est séparée du tronc. Comment en serait-il autrement? Le prêtre grec reçoit à peine une instruction élémentaire; admis au saint ministère sans préparation suffisante, absorbé ensuite par les exigences d'une vie nécessiteuse, il ne peut, ni s'occuper convenablement du troupeau confié à ses soins, ni lui donner une instruction qu'il ne possède pas lui-même.

Le clergé schismatique n'est pas plus avancé; il est de plus infecté d'un vice odieux : la simonie. La première des dignités, le patriarcat, se met en vente et est souvent coté à des sommes énormes; le patriarche vend ensuite les évêchés; les évêques à leur tour vendent les autres offices ecclésiastiques. Une fois en place, chacun n'a plus guère d'autre souci que de rentrer dans ses fonds et de s'enrichir promptement : de là une foule d'exactions dont nos mœurs ne donnent aucune idée.

On peut, d'après ce qui précède, comprendre toute l'étendue du mal et l'urgence d'y porter remède. Procurer aux populations chrétiennes du Levant le bienfait de la science et surtout de la science du salut, était donc un immense service à leur rendre, et l'on peut ajouter que la reconnaissance l'exigeait de nous, car, il ne faut pas l'oublier, c'est de l'Orient que nous est venue la civilisation avec la foi chrétienne. N'était-ce pas un devoir pour nous de faire briller à notre tour sur ces contrées la lumière que nous en avons reçue autrefois?

Créer des écoles, organiser une œuvre pour subvenir à leur entretien, devait être l'objet essentiel de notre sollicitude, et Cauchy le comprit mieux que personne. Toutefois, afin d'éprouver la valeur de l'idée nouvelle, il commença par recourir à l'expérience du passé et fut ainsi conduit à étudier avec soin les lettres et les récits des anciens missionnaires.

Ces hommes apostoliques avaient eu d'abord simplement en vue l'exercice de la prédication; mais, cédant bientôt à la force des choses, ils avaient été conduits à se transformer en instituteurs. Une expérience de trois siècles leur avait démontré la nécessité de relever et de multiplier les écoles. L'un d'eux écrivait à ses supérieurs en 1739 : « Je suis venu en Orient dans le but d'annoncer l'Évangile et voilà qu'on m'a fait maître d'école.

» Je comprends cette conduite de mes nouveaux supérieurs, de ces vétérans dans l'armée de Jésus-Christ.

» L'éducation d'enfants grossiers et ignorants n'est pas, à la vérité, ce qu'il y a de plus brillant dans le ministère; mais c'est peut-être ce qu'il y a de plus essentiel. Ainsi en ont pensé Saint Ignace et Saint François-Xavier, nos pères et nos maîtres; et, je ne crains pas de le dire avec les vieillards qui ont usé leur vie dans les labeurs de l'apostolat, si cet exercice n'était pas quelquefois un peu négligé, certaines missions ne feraient pas tant de bruit, mais elles feraient plus de fruit. »

Après avoir consulté les anciens, il fallait aussi profiter de l'expérience des contemporains, car le temps opère des changements, même dans l'immobile Orient. Parmi la foule de documents que Cauchy réunit à cette occasion, il en est deux dont je vais dire quelques mots: par leur diversité et par le contraste de leurs appréciations, ils caractérisent parfaitement les difficultés de la situation et les phases successives par lesquelles dut passer l'esprit du fondateur de l'Œuvre.

Le premier est un travail de M. Ed. Guys, ancien consul de France en Orient. Cauchy lui avait demandé un état des écoles alors existantes dans le Levant, et une sorte de programme sur ce qu'il y aurait de mieux à faire pour en établir de nouvelles. M. Guys lui répondit par un Mémoire très-détaillé, intitulé : « Aperçu des dépenses ordinaires et extraordinaires, par approximation, pour la première année, relativement à l'établissement immédiat de vingt écoles de garçons en Turquie. » Tout y est prévu : le traitement des professeurs, le loyer, le mobilier, le chauffage, l'éclairage et jusqu'aux frais de correspondance. D'après ce travail, l'établissement de deux écoles à Constantinople devait, à lui seul, coûter la somme de 42 000 francs. Ce chiffre, du reste, n'avait

rien d'exagéré en se plaçant au point de vue de l'auteur; ceux qui ont habité l'Orient savent assez quelle est, dans ce pays, la cherté excessive de la vie matérielle. La conclusion était que, tout en se flattant de procéder avec économie, les frais d'établissement des vingt écoles projetées s'élèveraient au chiffre énorme de 400 000 francs pour la première année, et les frais d'entretien à plus de 300 000 francs pour chacune des années suivantes.

Malgré l'extension qu'elle a reçue aujourd'hui, l'Œuvre des Écoles d'Orient est encore loin d'atteindre ce chiffre dans ses recettes annuelles; et cependant, avec une somme beaucoup moindre, elle fonde, entretient et encourage des écoles sur une multitude de points. Il y avait donc dans cette statistique, et surtout dans sa conclusion dernière, de quoi décourager une moins ferme volonté. Où trouver une pareille somme? Et, en supposant qu'on pût la réaliser une fois, comment obtenir chaque année un tel résultat?

Mais, ce qui est impossible à la politique et aux moyens purement humains, devient au contraire facile quand on fait appel au dévouement chrétien. C'est ce que prouve abondamment un second document dû à un vénérable prêtre, M. Allard, missionnaire en Orient. Cauchy lui avait aussi demandé des renseignements de même nature. Après avoir présenté un résumé de ce qui avait déjà été essayé, M. Allard ajoutait : « Je vous ai fait le tableau de nos écoles chrétiennes en Turquie. Elles sont peu nombreuses : une vingtaine. Multiplions-les, nous multiplierons les bienfaits de l'instruction, de la civilisation. Rien de plus facile : que la France accorde des secours matériels, de l'argent; les missionnaires, les sœurs ne lui manqueront pas. 1000 francs, 2000 francs suffiraient pour fonder une mission, et peut-on

douter que la Providence pourvoirait à leur avenir? Mais commençons par soutenir, par encourager les principaux établissements qui existent à Constantinople, à Beyrouth. Faisons un pas, commençons: ce sera le grain de sénevé qui deviendra le grand arbre. Formez un Comité, Messieurs, une noble association pour les Écoles d'Orient. »

Dans un autre endroit, le missionnaire parle avec enthousiasme de cet Orient où il y a tout à faire. « Souvent, dit-il, en récitant mon bréviaire à l'ombre d'un laurier-rose ou d'un myrte, pour me délasser d'une journée de mission, je regardais la mer de France qui s'étendait devant moi et je me disais : O beau pays de France, quand rendras-tu à ces côtes de l'Asie la lumière que tu en as reçue? Quand placeras-tu sur ces rivages un missionnaire, une sœur de charité? Quand Tarse, baignée par le Cydnus, visitée par Alexandre, plus fière d'avoir donné le jour à Saint Paul, Tarse qui possédait du temps du grand apôtre une Académie rivale de celle d'Athènes, quand Tarse verra-t-elle des sœurs de charité la réchauffer, la ressusciter? »

Quel contraste entre ce document et celui qui le précède! Il ne s'agit plus maintenant de dépenser 20 000 francs pour fonder une seule école : avec la même somme on se promet d'en créer vingt. Il est vrai que M. Guys parlait des seules ressources alors connues, et supposait qu'on prendrait pour maîtres de simples laïques, dont il faudrait bien au moins assurer l'existence. Mais un missionnaire raisonne et agit autrement; un missionnaire apporte avec lui un élément nouveau dont la statistique ne peut pas tenir compte, à savoir, l'esprit d'abnégation et de sacrifice avec lequel il accomplira des prodiges.

La question est maintenant résolue; l'expérience a parlé et elle a donné gain de cause à l'apôtre, ou plutôt

l'apôtre lui-même a vu ses espérances dépassées par les effets. Aujourd'hui l'Œuvre des Écoles d'Orient a vaincu bien d'autres difficultés et a réalisé des merveilles encore plus inattendues. Aujourd'hui il n'est plus même nécessaire de dépenser 1000 ou 2000 francs pour la fondation d'une école : il s'est organisé un ordre religieux, celui des *Mariamahs*, qui réalise cette œuvre utile et pieuse avec 200 francs, et moins encore, c'est-à-dire avec une somme que nous dépensons souvent avec tant de facilité pour satisfaire un simple caprice.

Ajoutons enfin que Cauchy consulta à loisir les hommes qui, par leurs études et leurs voyages, avaient une connaissance plus approfondie de l'Orient. Nous citerons à ce sujet une des circonstances qui ont dû influer le plus sur la direction de ses idées et de son zèle. Dans le cours de l'année 1843, M. Eugène Boré, qui ne faisait pas encore partie de la Congrégation des Lazaristes, mais qui lui avait déjà rendu de grands services en Orient, revint à Paris, et il profita naturellement de ce voyage pour intéresser sa généreuse patrie au bien qui se faisait dès lors dans le Levant. Lui aussi avait eu l'occasion de reconnaître l'utilité des écoles dans ces contrées, et en était venu à suivre l'exemple des premiers missionnaires. Après avoir quitté l'Europe avec une mission officielle, il se retrouvait, à peu de temps de là, transformé, contre toute prévision, en maître d'école dans l'Aderbijan, l'une des provinces persiques. Invité un jour au cercle catholique du Luxembourg, il y parla longuement de ces populations à la régénération desquelles il devait bientôt se consacrer sans réserve; il retraça en termes émus et ce qui avait été déjà accompli et ce qui restait encore à faire. Jamais l'auditoire n'avait été plus attentif ni plus impressionné. Cauchy entendit M. Boré, dont la parole

ardente tomba dans son esprit comme une semence destinée à produire plus tard des fruits abondants. On est amené ainsi à penser que ses projets sur la fondation d'une œuvre pour l'Orient étaient déjà anciens quand il se décida à en tenter la réalisation en 1856, et on a lieu de les faire remonter au moins à une douzaine d'années avant l'organisation de l'OEuvre. Qui ne sait, du reste, que les grandes idées ne se produisent pas tout d'un coup? Elles naissent d'abord faibles et imperceptibles, puis grandissent et se fortifient jusqu'au jour marqué par la Providence pour leur complète maturité.

L'idée première de l'OEuvre était donc conçue, les documents étaient rassemblés, la cause se trouvait en quelque sorte instruite; il fallait maintenant chercher des adhésions, réunir des souscriptions et arriver à une organisation régulière à travers toutes les difficultés inséparables d'une œuvre naissante : il fallait en deux mots passer de la spéculation à la pratique.

On voit ici un nouvel emploi de cet ingénieux moyen de succès dont Cauchy s'était si bien trouvé pour d'autres œuvres. C'est dans les rangs de la haute société et surtout parmi ceux des savants, de ses collègues de l'Institut, qu'il chercha ses premiers appuis, mettant ainsi heureusement la science elle-même au service de ses pieux desseins. Il avait du reste des motifs particuliers pour en agir de la sorte à l'égard de l'OEuvre nouvelle. En concevant son généreux projet avec la hauteur de vues qui lui était ordinaire, il comprit aussitôt que l'esprit de cette OEuvre, plus que de toute autre, devait être, de nos jours, un esprit de progrès, un esprit vraiment libéral et chrétien, et qu'il fallait par conséquent la placer sous le patronage des hommes les plus propres, par leur science autant que par leur vertu, à lui imprimer ces ca-

ractères essentiels. Il s'agissait enfin de venir en aide à ces chrétientés souffrantes de l'Orient que la France, fidèle à ses traditions de politique sage et généreuse, avait prises sous son protectorat spécial dans des capitulations anciennes conclues à la suite des croisades. Aussi convenait-il de faire entrer dans la direction de l'Œuvre quelques personnages joignant au sentiment chrétien la connaissance des besoins des populations orientales, et apportant de plus à l'association naissante l'influence de leur position sociale et l'autorité de leur nom.

L'Œuvre des Écoles d'Orient eut, en effet, comme Président d'honneur, à son origine, un maréchal de France (le maréchal Bosquet); pour Président, un contre-amiral, Membre du Bureau des Longitudes (le contre-amiral Mathieu). A la suite de ces deux noms illustres venaient modestement se placer ceux des deux Vice-Présidents : MM. Cauchy et Charles Lenormant, et celui du Secrétaire Général, M. Wallon, leur collègue à l'Institut. Enfin, parmi les Membres du Conseil général, on ne comptait pas moins de trois Sénateurs, trois Conseillers d'État et douze Membres des diverses Académies. Placée sous le patronage d'hommes aussi éminents, l'Œuvre fut accueillie partout par les plus vives sympathies et fit de rapides progrès.

Parmi les personnes qui apportèrent à Cauchy le concours le plus efficace, il faut surtout citer M. Lenormant, qui partagea avec lui, dès l'origine, la charge de la vice-présidence. Par une destinée singulière, cette œuvre si utile devait marquer pour tous les deux le terme de leur carrière, et paraître comme le dernier et suprême effort d'une vie consacrée au bien. Tous les deux, en effet, devaient être bientôt enlevés par la mort, laissant à d'autres le soin de poursuivre une entreprise si bien commencée.

M. Lenormant avait occupé l'une des chaires les plus importantes de Paris, et on se rappelle encore avec quelle intrépidité il prenait dans ses cours la défense des principes chrétiens. De plus, il avait beaucoup voyagé en Orient; l'intérêt de la science avait été sans doute son premier mobile, mais quand un homme inspiré par la foi est conduit par la Providence dans une contrée, il ne la traverse pas sans y laisser quelque chose de son âme, de son cœur, de sa charité, précieux trésor dont il est le dépositaire. M. Lenormant avait donc parcouru l'Orient autrement qu'en antiquaire, et personne n'était mieux en état, ni ne se montra plus empressé de seconder Cauchy dans ses desseins. L'Œuvre des Écoles d'Orient était l'objet de ses plus vives préoccupations pendant son dernier voyage où la mort vint le surprendre et l'enlever prématurément. Il parcourait la Grèce lorsque, sous le soleil ardent de la Laconie, il fut saisi d'une fièvre violente. On l'engageait à suspendre son voyage et à prendre un repos nécessaire; mais lui, comprenant la gravité de son mal, voulut à tout prix regagner Athènes, d'où le séparaient plusieurs journées de cheval, dans un pays sans route, sans ombre et sans hôtellerie. Son unique crainte était de se voir, à ses derniers moments, privé des secours d'une religion qu'il avait tant aimée et si bien servie. Ses vœux furent exaucés, mais la maladie avait fait des progrès irréparables; il mourut en catholique fidèle, sur cette terre dont l'affranchissement avait été l'objet de ses travaux, et de laquelle il pouvait saluer de plus près cet Orient qui était devenu pour lui comme une seconde patrie.

Pour se faire une idée exacte des résultats obtenus, il est indispensable de consulter les bulletins publiés par le conseil de l'Œuvre; nous nous contenterons de dire que

les écoles se sont multipliées avec une promptitude inespérée. On en trouve maintenant, non-seulement dans les grands centres, mais jusque dans les villages et les simples bourgades. Ces écoles ne sont pas uniquement fréquentées par les chrétiens; un bon nombre de Musulmans, bravant les préjugés de leurs coreligionnaires, y envoient aussi leurs enfants, afin de leur procurer le bienfait d'une instruction qu'ils chercheraient en vain dans leurs *Médressés*. La création de ces écoles a entrainé comme conséquence une foule de fondations intéressantes. On doit applaudir surtout à l'achat de nombreuses presses d'imprimerie munies de caractères orientaux; elles fonctionnent notamment à Gazir, à Beyrouth, à Mossoul; et, tout récemment encore, on vient d'en installer une à Gondar, au centre de l'Abyssinie. C'est à la fois l'instrument le plus actif d'instruction dans nos temps modernes et le meilleur gage de progrès pour l'avenir.

Insistons enfin sur un caractère remarquable de cette Œuvre importante : c'est d'avoir réuni de toute part les suffrages des hommes les plus opposés par leurs croyances et leurs principes. On a vu avec quelle sympathie elle a été accueillie en France par tout ce qu'il y a d'esprits chrétiens et élevés. On ne s'étonnera pas davantage que l'Œuvre ait été saluée avec reconnaissance et enthousiasme par les populations chrétiennes de l'Orient auxquelles elle venait se dévouer; mais, ce qui pourra surprendre, c'est l'accueil favorable qu'elle a rencontré chez les Musulmans et chez les Turcs eux-mêmes, la race du monde la moins studieuse et la plus dédaigneuse de savoir. Sans doute les Ulémas voient avec peine les mosquées délaissées et le Coran négligé par les enfants reçus dans les écoles, et ils multiplient leurs efforts pour faire revivre un passé qui leur échappe de plus en plus;

mais il est juste d'ajouter que, même parmi les Musulmans, il en est beaucoup qui sentent la nécessité de se réconcilier avec la science et de se mettre au niveau du reste de l'Europe. Si notre civilisation leur est suspecte quand elle se présente à eux sous les auspices de la diplomatie ou bien entourée du cortége d'armées terribles, il en est tout autrement quand elle leur apparaît sous la forme douce et attrayante de la charité chrétienne et qu'elle leur est offerte par nos missionnaires et nos sœurs de charité. Il s'est même rencontré chez eux des esprits supérieurs, capables d'apprécier toute la fécondité d'une œuvre catholique et qui n'ont pas hésité à s'en déclarer les partisans et les protecteurs.

En 1858, le sultan mariait deux de ses filles, et afin d'attirer sur elles les bénédictions du ciel, il envoyait une somme d'argent considérable aux sœurs de Saint-Vincent de Paul en l'accompagnant de ces paroles : « Priez pour mes enfants, car il est impossible que les prières de femmes qui font autant de bien ne soient pas agréables à Dieu. » C'est ainsi que les préjugés et le fanatisme commencent à céder au zèle des missionnaires et aux miracles de la charité. Une chose surtout frappe profondément les Musulmans : c'est le dévouement de ces admirables religieuses. Ils ont un respect tout particulier et une sorte de culte pour ces pieuses femmes, qui ont quitté leur patrie et tout ce qu'elles avaient de plus cher au monde pour venir de si loin leur faire du bien, instruire leurs enfants, soigner leurs malades. Ils s'étonnent d'un dévouement qui n'est pas écrit dans le Coran et qui est pour eux une manifestation inattendue et saisissante de la supériorité de l'Évangile.

Accueillie partout avec la plus vive sympathie, l'Œuvre des Écoles d'Orient pouvait espérer d'accomplir en paix

sa bienfaisante mission; et cependant, à quelques années seulement de sa naissance, elle eut à traverser une crise terrible. Au mois de mai 1860, l'Europe stupéfaite apprit que les populations chrétiennes du Liban périssaient victimes de la plus odieuse trahison. Surprises dans leurs foyers sans armes, elles avaient été dévastées par le pillage et le meurtre, et avaient eu à subir les plus infâmes traitements que puisse inventer une soldatesque effrénée. On put craindre un moment de voir l'Œuvre des Écoles disparaître au milieu de ces ruines; mais la Providence devait montrer une fois de plus comment elle sait faire sortir d'un mal passager un bien permanent. En présence de tels désastres, l'Œuvre redoubla de zèle; on vit surgir des dévouements imprévus, partout des souscriptions s'organisèrent, et les offrandes remises aux mains du Comité dépassèrent bientôt la somme de deux millions de francs. Ce remarquable résultat valut à l'Association, avec de nouvelles sympathies, des ressources plus abondantes et plus durables; c'est ainsi que la renommée du bien accompli par elle se répandait dans le monde entier.

Mais parmi tous les suffrages favorables à l'Œuvre des Écoles d'Orient, il en est quelques-uns qui ont, à nos yeux, une plus haute portée et une valeur exceptionnelle. En général les œuvres catholiques, par leur nature même, n'intéressent qu'un nombre limité de personnes. Pour les comprendre, il faut partager le sentiment religieux qui les inspire; les indifférents ou négligent de s'en occuper ou les dédaignent. Il est cependant certaines œuvres dont les résultats sont si incontestables et si frappants, que les plus inattentifs sont bien obligés d'en reconnaître l'importance et de leur rendre hommage. Ce rare privilége devait appartenir à l'Œuvre des Écoles d'Orient. La cause en est, non-seulement dans l'idée gé-

généreuse qui l'a inspirée, mais encore dans le sentiment vraiment libéral qui l'anime, et enfin dans l'esprit patriotique et national qui s'y trouve mêlé. Pour en apprécier l'utilité et la portée, il n'est pas nécessaire d'avoir la foi, il suffit d'avoir le sentiment naturel de ce qui est profitable et bon; c'est ainsi qu'elle a obtenu l'approbation même des hommes, si nombreux de nos jours, qui cherchent et croient pouvoir trouver le progrès de l'humanité en dehors des principes chrétiens. A plus forte raison a-t-on vu des protestants éclairés, malgré les préjugés de leur naissance et de leur éducation, lui accorder leurs sympathies et travailler pour elle et avec elle (1).

Espérons donc que la charité sera, de nos jours, le terrain neutre où viendront se réconcilier les esprits trop longtemps divisés, et, parmi toutes les œuvres que l'inspiration chrétienne a fait naître, saluons celle des Écoles d'Orient comme devant contribuer pour une large part à ce travail de pacification religieuse.

---

(1) *Bulletin* du mois de septembre 1862, p. 154; *idem* de septembre 1864, p. 159.

CHAPITRE XVII.

PHYSIONOMIE DE CAUCHY.

> Tout ainsi doncques, comme les peintres qui portrayent au vif,..... aussi nous doit-on concéder que nous allions recherchant les signes de l'âme et par iceux formant un portrait au naturel.
>
> PLUTARQUE, *Vie d'Alexandre.* — Traduction d'AMYOT.

Traits principaux de la physionomie de Cauchy. — Ses qualités naturelles. — Ses amitiés. — Ses relations avec le monde. — Caractère de son génie scientifique. — Reproches adressés à Cauchy. — Discussion à ce sujet.

Avant de dire comment se termina cette belle vie que nous achevons de raconter, le moment nous semble venu de résumer notre travail et en même temps de le compléter par quelques traits que nous aurions pu difficilement rattacher à l'un des chapitres qui précèdent.

Ce qui frappait d'abord dans Augustin Cauchy, c'était sa physionomie noble et digne, et, tout à la fois, remplie de grâce et d'affabilité. Sa figure était distinguée, son front large et élevé, ses yeux vifs et animés; mais son regard n'avait rien de scrutateur ni d'embarrassant : on y lisait la douceur et la bienveillance. Son langage était facile et abondant, affectueux et sympathique; sa conversation plaisait par un naturel empreint de franchise et de candeur. Le sourire qui errait habituellement sur ses lèvres avait un charme indéfinissable de bonté. Sur tous les traits de cette figure, ordinairement pâle et amai-

grie, mais expressive, on pouvait facilement suivre les impressions mobiles de l'esprit. Prompte à se contracter sous l'influence d'une contrariété, d'une peine quelconque, elle s'épanouissait bientôt au premier sentiment d'une difficulté vaincue, d'un obstacle surmonté. Cauchy ne savait pas dissimuler sa joie quand il était parvenu à faire réussir une œuvre de charité ou à résoudre un problème difficile. Ce n'est pas toutefois que, pour cette intelligence d'élite, l'étude des parties les plus abstraites des mathématiques eût rien qui sentît la préoccupation ni la fatigue; c'était au contraire un jeu pour lui, d'appliquer à la solution d'une question scientifique la facilité merveilleuse dont il se sentait doué par la nature; il trouvait à sonder les profondeurs de l'Analyse le même plaisir qu'un grand artiste éprouve à tirer de son instrument de ravissants accords, ou bien à fixer sur la toile, avec un pinceau, l'idéal qui tient sa pensée en extase.

Si le savant ressentait un regret, c'était plutôt de ne pas pouvoir répandre autour de lui et faire admirer, comme il l'aurait souhaité, ces vérités d'abstraction dont la contemplation avait, pour lui-même, un si grand charme. Tout esprit intelligent et cultivé est naturellement apte à comprendre une étude philosophique, à apprécier une œuvre d'art ou de goût; mais, pour juger d'une découverte scientifique, il faut une éducation spéciale, il faut avoir été longuement initié à la méthode et au langage des géomètres. Et cependant Cauchy savait encore rendre intelligibles, par une exposition élémentaire, ses recherches les plus délicates; il avait un talent particulier pour traduire en langue vulgaire l'écriture symbolique des mathématiques et pour rendre saisissables, même à l'esprit le plus étranger aux signes de l'algèbre, les traits essentiels des théories qu'il venait de découvrir.

La santé de Cauchy n'avait jamais été bien robuste. Les privations dont avait souffert sa première enfance, pendant la famine qui sévit en France sous le régime de la Terreur, n'y furent peut-être pas étrangères. Il se livra de bonne heure à l'étude avec une ardeur extrême; mais si, chez lui, les forces vives de l'intelligence reçurent de ce travail un précieux accroissement, celles du corps en furent au contraire sensiblement amoindries. Avec le temps, sa constitution finit cependant par reprendre le dessus, et, quoiqu'elle ait été toujours délicate, elle offrait à l'activité nerveuse de son âme un appui suffisant, et lui permit de poursuivre, sans trop d'efforts, le cours de ses incessantes recherches; quelques rides précoces sur son large front étaient les seules traces du travail opiniâtre de sa pensée.

On a souvent remarqué que les hommes de génie avaient été frêles et maladifs. Il ne faudrait pas croire, en effet, que la plénitude de la santé soit indispensable pour le complet développement de la pensée; en réalité l'intelligence se loge difficilement dans un corps athlétique. Il ne faut pas sans doute que l'instrument fléchisse et se brise entre les mains de l'ouvrier, mais souvent un esprit fortement trempé supplée à l'insuffisance de la nature. Un caractère ferme, une volonté énergique réagissent sur les organes du corps, le relèvent dans ses défaillances et lui communiquent une vigueur dont on ne l'aurait pas cru capable. C'est ce qui arriva pour Cauchy quand il fut parvenu à la maturité de l'âge; on vit alors son talent et ses nobles qualités se produire dans tout leur éclat. Mais, avec les années, cet heureux équilibre s'altéra peu à peu et finit par se rompre tout à fait.

On a conservé des portraits de Cauchy à diverses époques de sa vie. L'un d'eux, peint par Roller, et dont la

lithographie fait partie de la galerie des contemporains illustres, le représente à l'âge de quarante à quarante-cinq ans, c'est-à-dire dans la force de l'âge et du talent; il est difficile d'imaginer une figure répondant mieux à l'idéal qu'on aime à se faire d'un homme de génie. David d'Angers l'a représenté plus tard dans un de ces médaillons où il réussissait si bien. Les traits du savant ont pris un caractère plus sérieux ; on lui trouve un air plus recueilli et plus méditatif; on reconnaît l'homme qui a vieilli dans l'étude ; on peut aussi y démêler une âme qui a souffert et qui a perdu ses premières illusions au milieu des épreuves de la vie. La mort viendra bientôt achever le portrait en faisant briller sur cette noble figure, au lieu d'une empreinte terrestre, l'idéal du ciel et l'éclat de la vertu consommée.

Après la physionomie du corps, nous pouvons tracer la physionomie de l'âme. Celle de Cauchy avait pour traits principaux la simplicité et la modestie. Dans ses actions il n'y avait rien de faux ni d'emprunté ; tout reposait sur le fondement d'une piété solide. Il avait sans doute la conscience de son mérite et de l'importance de ses découvertes, mais s'il en parlait, c'était plutôt avec naïveté qu'avec orgueil. Dans son commerce habituel il avait des manières simples, ingénues et bienveillantes, des paroles pleines de bonté, même dans les relations passagères. S'il s'agissait de rendre un service, il était toujours prêt à obliger avec un cœur bienfaisant et libéral, et du reste avec une délicatesse extrême.

Ses amitiés étaient essentiellement solides et durables. Elles étaient fondées avant tout sur la conformité des sentiments chrétiens. *Amicitia aut pares invenit, aut facit*: telle était sa devise. Un cœur craignant Dieu, une âme gouvernée par les plus pures maximes de l'Évangile,

telles étaient les premières conditions qu'il recherchait dans un ami. On aura, du reste, une idée de ses relations d'intimité en citant les noms de quelques-unes des personnes avec lesquelles il fut le plus lié. Dans ce nombre, on trouve le marquis de Brignoles Sales, le comte de Senft, le comte de Trivulce dont il fit la connaissance pendant son séjour à Turin ; le comte Alexis de Noailles, le duc Mathieu de Montmorency ; MM. de Montalembert, de Falloux et Wallon, de l'Institut. Citons encore Frédéric Ozanam, dont il se trouvait naturellement rapproché par un même zèle pour les bonnes œuvres. Ajoutons enfin que, dans ses voyages en Italie et en Allemagne, Cauchy avait conquis les plus nobles et les plus solides amitiés, fondées sur l'estime inspirée par sa foi religieuse et politique, sur l'admiration provoquée par son généreux dévouement : à peine avait-il posé sa tente dans une ville, qu'il savait se rallier par un attrait sympathique tout ce qu'il y avait de plus éminent dans la science, la noblesse et la vertu.

Ses relations avec le monde étaient caractérisées par beaucoup d'aménité et d'abandon. D'ailleurs son commerce était toujours noble et distingué. C'était d'abord le résultat de ses qualités naturelles et le fruit de son éducation première. Son père lui avait inspiré de bonne heure le goût des manières polies. Encore enfant et écolier, il s'était trouvé en rapport, au palais du Luxembourg qu'habitait son père, avec Lagrange, Laplace et les autres membres les plus considérables du Sénat ; jeune homme, il s'était vu accueilli et même recherché par les hommes les plus distingués dans la science ; partout son mérite et ses hautes qualités lui avaient donné accès dans l'élite de la société. On pouvait seulement lui reprocher d'être un peu étranger à ces délicatesses de convention

qui constituent l'étiquette du monde ; c'était le naturel qui dominait chez lui. Il avait conservé dans l'âge mûr toute la candeur de l'enfance, mais il avait aussi quelquefois les défauts de cette qualité. Les anciens racontaient que la fontaine d'Aréthuse traversait la mer sans s'y mêler et sans perdre la pureté de ses eaux ; on peut dire de même de Cauchy qu'il traversait les sociétés du monde les plus illustres tout en conservant sa physionomie originale, qui, par sa naïveté même, se faisait aimer davantage. Quelques personnes, peu au courant de ses habitudes, étaient portées à le mettre au nombre de ces savants singuliers et distraits qui, toujours absorbés dans la sphère de leurs méditations et de leurs calculs, ne savent jamais en descendre pour rentrer dans la vie commune. Telle n'était point cependant sa disposition d'esprit : nul ne passait avec plus de facilité d'une occupation à une autre, d'une recherche d'analyse à une étude littéraire, d'un calcul difficile à une bonne œuvre. Il n'était point distrait, mais il était pressé, et il supportait difficilement la perte d'un temps dépensé en pures bienséances. Il y avait, du reste, un moyen infaillible de ranimer alors l'entretien, c'était de lui parler de ses œuvres charitables ; son esprit, subitement réveillé, retrouvait tout son feu et toute son énergie ; une transformation s'était opérée, et, à partir de ce moment, la conversation devenait intarissable.

Un autre trait du caractère de Cauchy, c'était la sobriété, ce que les anciens appelaient *temperantia ;* mais ici nous exprimerons par ce mot, non-seulement la tempérance qui concerne l'usage de la fortune et des biens matériels, mais surtout celle qui se rapporte à l'âme elle-même. Peu d'hommes se sont montrés aussi indépendants des choses qui constituent le bien-être de la

vie ; il était toujours prêt à tout sacrifier quand la voix du devoir avait parlé, et, chose étrange ! au milieu de tous les sacrifices que sa conscience lui avait imposés, on s'étonnait de le voir suffire à tant d'aumônes et soutenir tant d'œuvres avec une libéralité inépuisable. La modération dans ses habitudes et ses désirs l'avait enrichi, et la bénédiction de la charité avait multiplié ses biens. Enfin il possédait cette sobriété, la plus précieuse de toutes, qui consiste à être modéré jusque dans les meilleures choses ; suivant le conseil de Saint Paul, il était *sage avec sobriété*. C'était le résultat de cette piété vive et éclairée qui imprimait à son âme le cachet d'une paix tranquille et répandait sur toute sa vie comme un reflet de cet éclat céleste qui naît de la joie d'une bonne conscience.

Il arrive assez souvent que les hommes illustres demandent à être vus de loin, dans l'auréole de leur gloire ; « il n'y a pas de grand homme pour son valet de chambre, » dit une sorte de proverbe familier : c'est en effet dans la vie privée que les lacunes et les faiblesses sont surtout apparentes. Cauchy, au contraire, a été du petit nombre de ceux qui gagnent à être vus de près et dont la vie ne craint pas l'examen de détail ; il devait encore ce rare privilége à l'esprit chrétien dont toute sa conduite était pénétrée.

Pour compléter cette appréciation d'ensemble il nous reste à dire quelques mots de ce qu'on pourrait appeler la contre-partie de la louange et à discuter certains reproches dont Cauchy a été l'objet. Personne ne s'étonnera, du reste, que la plus belle vie ait quelques côtés par où se révèle la faiblesse de l'humanité ; notre impartialité nous commande de ne pas paraître les oublier.

Et d'abord on a reproché à Cauchy, comme savant,

d'être souvent obscur et de ne pas se préoccuper assez du soin de rendre ses découvertes accessibles, non-seulement aux jeunes gens, mais aux géomètres eux-mêmes. On doit avouer en effet que ses ouvrages sont d'une lecture difficile ; on y rencontre à chaque instant des procédés de calcul inusités, des notations et des formes de raisonnement singulières qui déroutaient au premier abord les esprits initiés aux anciennes méthodes. C'était un inconvénient réel ; mais pouvait-il entièrement s'y soustraire ? Peu habitué à suivre les sentiers battus, il s'attaquait de préférence aux questions les plus difficiles, à celles où les maîtres de la science avaient échoué avant lui ; il lui fallait dès lors se frayer des routes inconnues et créer, pour des solutions nouvelles, des procédés également nouveaux. En pareille circonstance n'est-ce pas un devoir pour les hommes d'étude, de suivre l'inventeur dans les régions ardues où son génie le transporte et de se mettre en état, par un travail préliminaire, de s'assimiler ses propres pensées ? Cette remarque expliquera comment des savants, doués d'ailleurs d'un mérite incontestable, ont été conduits, à l'égard de Cauchy, à des appréciations peu judicieuses, et sont restés longtemps sans comprendre la portée de ses travaux. Ce genre de difficulté n'arrête plus maintenant ; on s'est familiarisé avec les notations et les procédés du géomètre, et ceux qui ont pris cette peine n'ont pas tardé à s'en applaudir, car ils en ont retiré les ressources les plus précieuses pour leurs propres travaux. Qu'on ouvre aujourd'hui un ouvrage concernant les parties élevées des mathématiques, qu'on parcoure une Thèse ou un Mémoire de haute Analyse, on est presque sûr d'y rencontrer le nom de Cauchy ou d'y trouver le développement et les applications d'une théorie dont il a posé les fondements.

On lui a reproché aussi quelquefois de ne pas se tenir assez au courant de ce qui se passait autour de lui dans la science, de ne pas faire assez large la part de son temps qu'il donnait à la lecture des travaux de ses confrères, de ses émules. Il en est résulté, en effet, que plusieurs de ses œuvres semblent difficiles à aborder, comme une île où l'on n'aperçoit pas de rivage; mais si l'on considère le progrès général de la science, a-t-elle donc à regretter ce défaut qui lui a valu tant de méthodes neuves et fécondes? Chacun suit la pente de son génie. Celui d'Augustin Cauchy était de produire et d'avancer sans cesse. Les sciences mathématiques, comme les sciences d'observation, ont besoin sans doute de rencontrer des esprits méditatifs et patients qui résument dans de lumineux exposés, en les complétant eux-mêmes, les œuvres successives de plusieurs générations de savants, et qui, par la clarté du classement et de la méthode, impriment aux travaux qu'ils perfectionnent ou rectifient une forme arrêtée et presque définitive, du moins en attendant un nouveau progrès. Mais la science se trouve bien aussi de rencontrer, de temps à autre, de ces hommes qui frayent la route, qui déplacent les bornes des connaissances humaines et qui, semblables aux pionniers de l'Amérique, préparent de nouveaux champs de travail aux générations à venir.

Tel était Cauchy. On doit l'excuser de n'avoir pas toujours eu le temps de s'occuper des publications d'autrui, quand il n'a pas trouvé dans le cours de sa propre vie le loisir nécessaire pour relier et classer ses travaux personnels. Ne semblait-il pas même, par instant, oublier ses découvertes antérieures lorsque, l'abondance de son génie le portant de nouveau vers un but déjà entrevu, il se surprenait à refaire quelques parties d'un précédent

Mémoire? Depuis vingt ans et plus, les instances de sa famille et de ses confrères pressaient Augustin Cauchy de refondre, dans un grand corps d'ouvrage, les Mémoires détachés qu'il avait produits en si grand nombre, à mesure qu'il se sentait inspiré, sur tel ou tel sujet? Il ne pouvait souffrir en effet qu'une idée nouvelle restât captive dans son esprit, et l'intervalle de huit jours qui sépare les séances de l'Académie lui semblait quelquefois bien long, telle était son impatience de communiquer à ses collègues tout ce qui, dans ses recherches, pouvait intéresser la science. Lorsqu'on lui faisait remarquer combien une méthode de classement et d'ensemble donnerait de prix à ses divers travaux, combien surtout elle en faciliterait l'étude aux jeunes savants, pour lesquels son affection était si paternelle, il se laissait persuader aisément. Il prenait de tout cœur la résolution de se mettre à l'œuvre et d'y consacrer tout le temps que ne réclameraient pas d'autres devoirs. Puis, à peine avait-il saisi la plume pour écrire son livre, qu'une idée nouvelle survenant aussitôt l'entraînait, par un charme invincible, à la poursuite d'un résultat important dont il jouissait déjà par avance, comme un chasseur qu'une proie plus belle détourne de la trace qu'il avait d'abord suivie. Mais qui pourrait s'en plaindre, s'il est vrai, comme l'assurent les maîtres de la science, que ces résultats atteints presque à la dérobée, et qui semblaient le distraire d'une manière regrettable de l'accomplissement d'un grand dessein, renferment, au contraire, des éléments d'étude du plus haut prix pour les savants futurs ?

L'unique moyen de contenir sa verve, de la faire rentrer comme un fleuve trop abondant dans son lit, c'eût été, sans nul doute, cet exercice du professorat dont il sentait lui-même qu'il avait besoin pour compléter sa

vie. Les fonctions de professeur ne lui offraient pas seulement la satisfaction de ce sentiment d'expansion généreuse qui le portait à se mettre en communication intime avec les jeunes gens des écoles qu'il aimait, qu'il admettait dans son cabinet de travail comme dans son salon, avec lesquels il s'entretenait familièrement en ami plutôt qu'en maître; son enseignement n'eût pas été moins utile au progrès de la science qu'à celui de ses élèves. La nécessité d'exposer oralement ses idées l'aurait obligé à en dessiner, pour ainsi dire, plus nettement les contours. Lorsqu'il enseignait ses méthodes, il leur donnait plus de précision et de netteté, il en coordonnait avec plus de soin les principes. La craie à la main, ses formules s'exprimaient, ce semble, plus aisément sur le tableau qu'elles n'eussent pu le faire avec la plume dans ses cahiers, car son génie si fécond retrouvait encore au contact de ses auditeurs une activité nouvelle, et un rayon de joie illuminait les traits de sa figure lorsque la démonstration qu'il cherchait à rendre sensible frappait d'évidence son auditoire. Son cours terminé, ses leçons se seraient classées d'elles-mêmes pour former les chapitres d'un livre. On l'a vu par les seuls volumes qu'il ait publiés en corps d'ouvrage sur le calcul infinitésimal, et qui n'ont fait que reproduire ses leçons données à l'École Polytechnique. Qui peut douter que dans des cours libres, comme ceux du Collége de France et de la Sorbonne, où il eût été maître de choisir chaque année le programme de son enseignement, il n'eût développé successivement, dans toutes leurs conséquences, ces belles théories d'Analyse mathématique, de Physique et d'Astronomie auxquelles son nom restera particulièrement attaché?

Si l'on veut, du reste, apprécier convenablement le génie

de Cauchy, il suffira de rappeler les témoignages que lui ont rendus les savants les plus illustres. A tous ceux qui ont déjà été cités, je joindrai ici celui d'un géomètre éminent qui, pendant sa trop courte carrière, a enrichi la science de plusieurs découvertes capitales. Le Norvégien Abel avouait hautement que c'était dans les ouvrages de Cauchy qu'il avait puisé les premières idées de ses recherches, et il écrivait un jour que « parmi les savants de l'époque, Cauchy était celui qui comprenait le mieux comment il fallait étudier les mathématiques. »

Toutefois, à côté des éloges, il y eut des critiques plus ou moins vives, et il faut bien reconnaître que Cauchy, soit comme savant, soit comme homme privé, n'a pas toujours été jugé avec bienveillance, que même quelques appréciations ont manqué à son égard de justice et d'impartialité. Il était difficile qu'en beaucoup de circonstances un homme d'un si rare talent ne fût pas exposé à être l'objet de l'envie. Cauchy eut des envieux, il eut des adversaires, et, malgré la noblesse et la bonté de son caractère, on pourrait aller peut-être jusqu'à dire qu'il eut des ennemis. Il est bien loin de ma pensée de vouloir raviver des préventions que le temps a déjà fort affaiblies, mais il n'est cependant pas possible de passer complétement sous silence ce côté triste de la vie du grand géomètre. C'est un fait trop connu que Cauchy ne rencontra pas toujours dans le monde savant, et même auprès de plusieurs de ses collègues de l'Institut, les sympathies dues à son mérite et à sa personne. Dans plusieurs occasions il fut l'objet de tracasseries injustes, et, plus d'une fois, des hommes que leur rang et leur talent devaient mettre au-dessus des passions vulgaires profitèrent de telle circonstance, où le savant pouvait se

trouver en défaut, pour lui susciter les querelles les plus acerbes. Son caractère religieux ne fut pas même respecté, et quelques personnes, aveuglées par des préjugés, allèrent jusqu'à suspecter la sincérité de ses convictions, malgré le témoignage éclatant de sa vie tout entière.

Ces attaques passionnées lui furent très-sensibles; elles jetèrent sur la fin de sa vie un fond de tristesse et d'amertume dont ses amis seuls avaient été les confidents discrets. Cauchy n'était point fait pour les luttes de ce genre. Bon et affectueux par nature, il n'entendait rien à cette guerre de dénigrement et d'injures qu'on se permet trop souvent contre ses adversaires; une attaque malveillante le déconcertait, et, devant un mot blessant, il restait sans défense.

La principale circonstance où l'on vit paraître cet esprit d'animosité se présenta au commencement de l'année 1857, quelques mois seulement avant la mort de Cauchy. L'origine du débat se trouvait dans une réclamation de priorité qu'il avait élevée au sujet de certaines recherches relatives à la Mécanique des corps solides. Ses prétentions ne furent point admises, et il ne m'appartient pas d'infirmer en rien les appréciations de l'Académie à ce sujet : je me contenterai de rapporter le jugement porté sur cet incident par l'un des membres les plus autorisés de l'Académie elle-même. Voici en quels termes M. Combes s'exprimait dans son discours funèbre : « Si nous l'avons entendu, récemment encore, revendiquer avec quelque ténacité la priorité de recherches qu'il croyait lui-même lui appartenir, il n'était animé d'aucun sentiment indigne de lui (nul n'a pu s'y tromper), ni peut-être par aucune ambition d'accroître une gloire consacrée par des découvertes bien autrement éclatantes. Il agissait plutôt sous l'influence d'une émulation dont

l'expression était franche et vive, comme elle avait pu l'être lors des premiers succès de sa jeunesse. » Cette appréciation résume avec impartialité l'état de la question. Elle met hors de cause l'honorabilité de Cauchy; elle montre que s'il y avait un reproche à lui adresser, ce serait uniquement d'avoir réclamé avec trop d'insistance des droits douteux dans une matière qui, en définitive, concernait un point secondaire de la science et ne pouvait rien ajouter à la gloire de ses grandes découvertes.

Mon intention avait d'abord été de ne point parler de ces incidents et de les laisser tomber dans l'oubli; je n'eusse point hésité à le faire s'il ne subsistait à cet égard des documents publics qui seraient de nature à peser d'une manière fâcheuse sur la mémoire de Cauchy. Les accusations ont été notoires, elles se sont élevées devant l'Académie, les *Comptes rendus* en perpétuent le souvenir, et, tout récemment encore, elles ont été malheureusement reproduites dans des ouvrages répandus parmi le monde savant. Il était donc nécessaire de donner au moins quelques éclaircissements, afin de mettre le lecteur en garde contre des allégations malveillantes, qui trouvent, du reste, leur meilleure réfutation dans le tableau de cette belle vie que nous avons fidèlement racontée.

On a encore reproché à Cauchy de n'avoir pas été exempt de partialité dans les élections académiques, en faveur des candidats qui sympathisaient le mieux avec ses opinions politiques et religieuses. Il serait difficile aujourd'hui de juger ce qu'il peut y avoir de fondé dans cette imputation, mais on aperçoit tout de suite qu'elle se rattache à des appréciations de mérite personnel au sujet desquelles il peut y avoir, dans une assemblée savante, autant d'avis différents qu'il y a de nuances dans les couleurs; elle touche du reste à la liberté de la con-

science dans l'exercice de l'un de ses droits les plus intimes, et, par là même, échappe à toute discussion.

On voit en résumé quelle est la nature des critiques dont Cauchy a été l'objet; la plupart ne portent que sur des suppositions gratuites ou hasardées, et enfin, lors même qu'on voudrait leur attribuer quelque valeur et quelque poids, elles n'ôtent rien à sa gloire et n'altèrent aucun des traits essentiels de sa noble figure. C'est ce que je tenais surtout à établir.

M. Biot, en commençant la remarquable Notice (1) qui est déjà connue de nos lecteurs, exprimait cette pensée : « Qu'il y avait un intérêt moral, autant que scientifique, à montrer au public de notre temps, sous ses traits véritables, comme savant et comme homme, le mathématicien illustre que l'Académie venait de perdre.... La vie d'Augustin Cauchy, ajoutait-il, offre en effet un exemple complet de la vertu chrétienne, unie aux plus hautes facultés de l'intelligence. Il a été l'un des géomètres les plus éminents que la France ait produits; et son caractère personnel n'a pas été moins remarquable que son génie mathématique. »

Tel est le jugement porté sur Cauchy par un homme qui fut le témoin intime de sa vie, par un Académicien illustre qui possédait à un haut degré le sentiment des exigences de l'honneur et de la dignité humaine, et dont chacun se plaît à reconnaître le sens intègre et la scrupuleuse impartialité. Après avoir signalé les critiques et énuméré les reproches, il n'était pas inutile de rapprocher ce témoignage décisif de tous ceux que nous avons eu déjà l'occasion de rappeler, et de laisser une voix aussi imposante dire, en quelque sorte, à notre place, le der-

(1) Lettre de M. Biot à M. de Falloux.

nier mot de ce Chapitre. Les appréciations d'un biographe peuvent quelquefois paraître suspectes; on se tient naturellement en garde contre les sentiments que peut lui inspirer une admiration indulgente; mais quand on voit une foule d'hommes, non moins considérables par la supériorité de leur talent que vénérés pour la noblesse de leur caractère, se rencontrer dans un hommage unanime à l'égard d'un de leurs contemporains, on ne peut s'empêcher de trouver dans cet accord un gage certain du jugement définitif que la postérité devra prononcer à son tour.

CHAPITRE XVIII.

LA MORT ET LES FUNÉRAILLES.

Beatus qui intelligit super egenum et pauperem; in die mala liberabit eum Dominus.

Psaumes, XL, 1.

Dernière maladie de Cauchy. — Ses sentiments de piété. — Il s'occupe encore de bonnes œuvres. — Récits de ses derniers moments. — Discours funèbres. — Lettres et témoignages divers.

Malgré le déclin sensible de sa santé, Cauchy avait conservé toute son ardeur pour l'étude. Pendant les dernières années de sa vie, il continuait de développer les conséquences de ses nombreuses découvertes, et, lorsque la mort est venue le saisir, il s'occupait encore d'un travail important relatif à l'astronomie. Mais ces efforts mêmes contribuaient singulièrement à diminuer ses forces et à hâter le moment fatal.

D'un autre côté il éprouvait cette tristesse à laquelle nul homme n'échappe en vieillissant et qu'on pourrait appeler *le sentiment du vide*. Dans le cours de peu d'années il avait vu disparaître plusieurs des objets les plus chers de ses affections de famille. Après la mort de sa mère, survenue en 1839, il avait eu à déplorer, en 1848, celle de son vénérable père, qui avait conservé jusqu'à l'âge de quatre-vingt-neuf ans la plénitude de sa verte intelligence. L'année suivante, la mort prématurée de sa belle-sœur, Mme Eugène Cauchy, venait lui causer un nouveau et bien vif chagrin. Son frère Alexandre ne devait le précéder dans la tombe que de quelques semaines. Ces deux frères, qui n'avaient cessé d'être unis depuis

leur enfance par les liens d'une affection si tendre, étaient destinés à passer en même temps de cette terre d'exil dans la patrie céleste ; on a pu leur appliquer avec vérité l'expression touchante de nos livres saints : « *Amabiles et decori in vitâ suâ, in morte quoque non sunt divisi.* » L'émotion douloureuse que ressentit Augustin Cauchy en perdant son frère, ne fut peut-être pas étrangère à l'affaiblissement général qui précéda sa fin. On peut à peine qualifier de maladie grave l'affection dont il se trouva atteint, tant les premiers symptômes furent légers et presque insignifiants dans leur caractère; c'étaient tout au plus ceux d'une simple fièvre catarrhale; le malade espérait même s'en relever au bout de peu de jours et reprendre la suite de quelques bonnes œuvres qu'il avait interrompues avec grand regret. Mais il comptait sans l'épuisement produit par le travail et la fatigue, plus encore que par les années; sa constitution délicate était devenue semblable à un de ces terrains qui, après avoir été minés peu à peu, finissent par céder sous un dernier et léger effort. L'affection avait d'abord paru assez bénigne pour que, de l'avis des médecins, il fût transporté à sa campagne de Sceaux, où la saison paraissait favorable pour le rétablissement de ses forces; mais tout à coup, le jour de l'Ascension, les symptômes prirent un caractère alarmant, et peu d'heures après, cette belle intelligence, qui avait rendu à la science tant de services signalés, s'éteignait ici-bas pour revivre dans un monde meilleur (le samedi, 22 mai 1857).

Cauchy est mort comme il a vécu, avec la simplicité d'une âme droite, d'une conscience qui se tient toujours prête à paraître devant Dieu et qui par conséquent envisage sans effroi l'approche du dernier moment. Dès qu'il connut la gravité de son état, il fit avec générosité le

sacrifice de sa vie et ne pensa plus qu'à se recueillir une dernière fois pour mourir saintement. Le savant avait disparu, le chrétien seul restait. Sur ses lèvres pas un mot de regret pour ses travaux interrompus, pas un retour sur ses travaux passés, sur ces belles découvertes dont l'éclat devait perpétuer sa mémoire. Il avait accompli courageusement sa tâche d'homme, il avait rempli avec honneur sa mission, et il laissait à Dieu le soin de la récompense. Et d'ailleurs qu'étaient ses travaux, et combien ils devaient lui paraître peu de chose en présence de l'éternité! Là, le chrétien allait trouver son Dieu, avec la réalisation des espérances de son âme et de son cœur; là aussi, le savant allait posséder, dans toute sa plénitude, cette science à laquelle il avait consacré son existence et dont il n'avait pu entrevoir ici-bas que quelques rayons faibles et décolorés. C'est ainsi que la créature terrestre doit disparaître devant le créateur, et que l'intelligence humaine doit se perdre pour être transfigurée dans l'intelligence divine. Bossuet, dans son magnifique langage, a entrepris quelque part de décrire cette transformation céleste, et jamais peut-être le tableau qu'il en trace n'avait été mieux réalisé (1). « Je me suis levé, dit-il, pendant la nuit avec David, *pour voir vos cieux qui sont l'ouvrage de vos doigts, la lune et les étoiles que vous avez fondées*. Qu'ai-je vu, ô Seigneur, et quelle admirable image des effets de votre lumière infinie! Le soleil s'avançait, et son approche se faisait connaître par une céleste blancheur qui se répandait de tous côtés. Les étoiles étaient disparues et la lune s'était levée avec son croissant, d'un argent si beau et si vif, que les yeux en étaient charmés. Elle semblait vouloir honorer le soleil

(1) *Traité de la Concupiscence*, chap. XXXII.

en paraissant claire et illuminée par le côté qu'elle tournait vers lui; tout le reste était obscur et ténébreux..... Mais à mesure qu'il approchait, je la voyais disparaître; le faible croissant diminuait peu à peu, et quand le soleil se fut montré tout entier, sa pâle et débile lumière s'évanouissant, se perdit dans celle du grand astre qui paraissait, dans laquelle elle fut comme absorbée. On voyait bien qu'elle ne pouvait avoir perdu sa lumière par l'approche du soleil qui l'éclairait, mais un petit astre cédait au grand, une petite lumière se confondait avec la grande; et la place du croissant ne parut plus dans le ciel, où il tenait auparavant un si beau rang parmi les étoiles. » Tel est le sacrifice que toute intelligence doit accomplir au terme de sa carrière terrestre. Ce sacrifice, si pénible à la nature, Cauchy l'accepta avec résignation; on peut même dire qu'il l'accomplit avec joie et comme sans effort, tant il y était préparé d'avance par tout l'ensemble de sa vie.

Mais si, dans ce moment suprême, la science n'entrait plus pour rien dans ses pensées, son activité se reportait encore sur les bonnes œuvres qu'il avait entreprises et qu'il laissait inachevées. Une d'entre elles surtout lui tenait alors profondément à cœur; c'était l'établissement à Sceaux des frères de la Doctrine chrétienne pour l'éducation des enfants de la commune. Cette œuvre ne devait pas s'établir sans rencontrer, à son origine, d'assez vives résistances. Des écoles avaient été ouvertes, mais simplement à titre d'écoles libres et sans pouvoir obtenir l'appui et les subventions de la municipalité. Cauchy y avait suppléé en soutenant ses protégés de sa bourse, et il espérait qu'avec de la persévérance les difficultés finiraient par disparaître. Il arriva en effet un moment où ces difficultés s'évanouirent comme d'elles-mêmes, mais ce moment fut le lendemain de sa mort. L'œuvre

alors fut acceptée par tous comme un legs de sa charité. Cauchy ne pouvait prévoir un dénoûment aussi prochain ; il craignait toujours que le succès ne répondît pas à ses efforts, et c'était pour lui l'objet d'une préoccupation constante.

Parmi les marques précieuses d'intérêt et de sympathie que Cauchy reçut pendant sa courte maladie, rappelons celles qui lui furent données par Son Éminence le cardinal Morlot, archevêque de Paris. Cet illustre prélat était allé à Sceaux, le jeudi 20 mai, pour y administrer le sacrement de confirmation ; dès qu'il eut appris l'état du malade, il s'empressa de se rendre auprès de lui pour fortifier son courage et lui montrer, par cette démarche, tout le prix qu'il attachait au rétablissement de sa santé. On était encore loin de se douter que le mal fût sans remède.

Nous aurions pu, d'après les pieux souvenirs de la famille, écrire nous-même l'édifiant récit de cette mort. Mais nous trouvons ce récit déjà imprimé dans un ouvrage où il est associé à la sainte mémoire d'un des amis les plus vénérables et les plus illustres d'Augustin Cauchy (1). Nous nous bornerons donc à reproduire la lettre même que le P. Coué, alors recteur du Collége des Jésuites à Vaugirard, adressa, à cette occasion, à l'un des PP. de sa Compagnie :

« Mon Révérend et Cher Père, le jeudi, fête de l'Ascension, M. Cauchy, malade depuis dix jours, donna des craintes sérieuses. Le P. Lefebvre fut appelé, alla le jour même à Sceaux, et le confessa. Le lendemain j'y allai moi-même. Je le trouvai dans un grand assoupissement d'où on le fit sortir en me nommant. Il me témoi-

(1) *Vie du P. de Ravignan*, par le P. de Pontlevoy.

gna combien ma visite lui faisait plaisir, me dit en souriant et avec calme un mot de sa santé, puis me parla avec animation de l'établissement, à ses frais, d'un frère des écoles chrétiennes et de l'obstacle qu'il rencontrait dans le conseil municipal. Comme je me disposais à le quitter, après lui avoir promis de dire la messe à son intention le lendemain, il me pria de le bénir.

» Cependant on était allé prier M. le Curé de venir lui donner les derniers sacrements. Il était absent, son vicaire aussi ; je m'étais arrêté dans une maison où j'avais laissé deux élèves ; on vint m'y chercher, et je retournai avec le saint viatique et les saintes huiles, que je déposai dans le salon ; puis je me rendis auprès du cher malade, qui ne connaissait pas la gravité de son état. Dès que je lui eus dit que je venais, avant de le quitter, lui offrir une grande consolation, celle de recevoir Notre-Seigneur, il me répondit : « Oh ! bien volontiers, mais avant tout je veux que le grand escalier par où doit passer Notre-Seigneur soit orné de toutes les plus belles fleurs du jardin. » Je lui dis qu'ayant peu de temps, j'avais déjà apporté le saint sacrement, mais que toutes les fleurs du salon orneraient sa chambre à coucher, et que sa famille honorerait Notre-Seigneur de son mieux. Sans insister il me dit avec une aimable simplicité : « C'est bien, mon Père, mais je désire me confesser. — Vous l'avez fait hier ; cela n'est pas nécessaire. — Je le désire, car le P. Lefebvre a eu peu de temps à me donner. »

» Pendant l'extrême-onction, il répondit à toutes les prières et interrogations du rituel avec une simplicité, une foi et une ferveur vraiment sublimes. Le P. Billot, venu de la rue des Postes, m'assistait. Le pieux malade, qui était attentif à tout, craignit que son oreille gauche n'ayant pas été assez découverte, l'onction n'y eût pas été

bien faite : je le rassurai. Quand je lui dis de fermer les lèvres il me répondit : « Bien volontiers, mon Père. » Pour l'onction des pieds il craignit encore qu'on ne fît pas bien, et dit à la sœur de Bon-Secours : « Mais il faut découvrir les deux ; il n'y en a qu'un de dégagé. » Après la cérémonie, il m'appela et eut quelque crainte de n'avoir pas bien fait sa pénitence. Il voulut la renouveler, ce que nous fîmes en répétant une pieuse invocation.

» Le moment de lui donner le saint viatique étant venu, il m'appela encore et me dit : « Mon Père, je ne sais si je pourrai avaler la sainte hostie. » Mme Cauchy et la sœur crurent qu'il le pouvait ; mais, pour ne pas le troubler, je lui en donnai seulement une parcelle, qu'il reçut avec un grand respect et une figure angélique. Il baisa ensuite le crucifix avec effusion, et répondit quelques mots d'humilité aux encouragements que je lui donnai. Après quelques instants de recueillement, il m'appela et me dit : « Mon Père, comme confrère de Saint-Vincent de Paul, j'ai droit à une indulgence plénière, à la mort. — Je vous l'ai donnée avant le viatique. — Ah ! vous ne m'en avez pas averti. — C'est vrai ; eh bien, je vais la renouveler pour votre consolation. » Enfin je lui demandai s'il ne voulait pas imiter les Patriarches en bénissant sa famille qui l'entourait. Il y consentit. Je pris alors sa main droite que je soulevai sur les siens, et il dit bien distinctement : *Benedictio Dei omnipotentis, Patris et Filii*, etc. Je le quittai alors pour ne plus le revoir ici-bas, emportant à l'église le saint sacrement.

» Le soir il reçut la visite de M. le Curé, qui lui dit en le quittant qu'il prierait Dieu de lui rendre une santé si chère aux siens, aux pauvres et à tous les habitants de Sceaux. « Monsieur le Curé, reprit le malade, priez surtout pour l'œuvre des Frères ; les hommes passent, les œuvres

restent. » La sœur qui le soignait lui ayant dit : « Vous souffrez, je prie Dieu de vous soulager », il lui répondit : « Mais non, je ne souffre pas beaucoup. » On pouvait croire en effet, à sa patience admirable, à son sourire si bon, si naïf et si bienveillant, qu'il souffrait peu.

« Le samedi 23 mai, Mme de l'Escalopier, sa fille, m'écrivait : « Nos craintes ne se sont que trop réalisées. Après » avoir conservé jusqu'à trois heures du matin toute sa » présence d'esprit, mon père a prononcé, vers trois heu- » res et demie, les saints noms de Jésus, Marie, Joseph ; » pour la première fois il a paru s'apercevoir de la gra- » vité de son état, et, vers quatre heures, il remettait son » âme entre les mains de Dieu, avec un calme qui nous » faisait douter encore de notre malheur, lorsqu'il était » arrivé. »

» Tout le monde est convaincu que le saint homme est allé droit en paradis. A la rue des Postes, on disait : « Ce bon monsieur Cauchy ! il sera entré au ciel comme il entrait dans nos chambres, sans frapper à la porte. » Le lundi, au convoi, tout le monde savant et religieux, venu de Paris, se montrait recueilli et pénétré. Le maire de Sceaux, avec quelques paroles bien senties, a fait couler beaucoup de larmes. J'ai vu de pauvres ouvriers, de pauvres femmes, de pauvres filles pleurer comme des enfants autour de cette tombe où descendait un père, un ami, un bienfaiteur. »

Ce qui domine surtout dans ce récit de la mort de Cauchy, c'est la simplicité de son âme et la naïveté touchante de sa foi. A la vue du chrétien mourant qui reçoit son Dieu pour la dernière fois, on se souvient aussitôt de l'enfant qui se préparait jadis avec tant de sollicitude à sa première communion ; entre ces deux actes extrêmes il s'est passé une vie tout entière, vie féconde pour la science et les bonnes œuvres, vie illustrée par le génie et la

vertu; mais l'esprit est demeuré le même, la foi a conservé toute sa pureté, et la charité toute sa ferveur. On peut rencontrer des morts plus solennelles, on en citerait difficilement de plus édifiantes. Chacun révèle, à cet instant suprême, le caractère propre de son âme : les uns ressentent plus vivement la grandeur et la majesté de Dieu, ou la crainte de ses jugements redoutables; les autres s'inspirent plutôt de sa bonté et de son amour et font paraître dans l'accent de leurs dernières paroles le sentiment de confiance qui les anime. Pour lui, au milieu des angoisses de la maladie et jusque dans l'agonie, il conserve le même calme; à ses yeux, le passage de la vie à la mort est un événement semblable à tous les autres; il l'envisage sans terreur et s'y prépare sans trouble. Cette sérénité et cette douceur en face de la tombe ont quelque chose de vraiment sublime, et ce spectacle d'un grand génie, se courbant devant la mort avec l'humilité d'un saint et la docilité d'un enfant, est un des plus beaux qu'on puisse proposer à l'admiration des hommes. On se rappelle à cette occasion ces paroles des livres sacrés : « Si vous ne devenez comme des petits enfants, vous n'entrerez point dans le royaume des cieux. »

Nous venons de raconter parallèlement la vie du savant et celle du chrétien ; après la mort, ce dernier titre devait rester seul inscrit sur la tombe du grand géomètre et du grand homme de bien. A quelques cents mètres de l'ancienne maison de campagne de la famille de Bure, sur la route ombragée de grands châtaigniers qui conduit de l'église de Sceaux au joli coteau de Plessis-Piquet, on rencontre un modeste cimetière de village dont les allées ressemblent encore à celles d'un jardin. C'est là que repose Augustin Cauchy. Sur une pierre carrée servant de piédestal à une croix de fer, on peut lire ce verset du

psaume : *Beatus qui intelligit super egenum et pauperem.* C'est toute son épitaphe ; j'en connais peu de plus simple, de plus touchante et en même temps de plus vraie.

La mort de Cauchy fut l'occasion d'un deuil général. Dans le nombreux cortége qui se pressait derrière le char funèbre, on voyait, à côté de ses parents désolés, les députés de toutes les Compagnies savantes. C'étaient les Membres de l'Institut, ceux du Collége de France, de la Sorbonne, de l'École Polytechnique, où il avait donné, à diverses époques, un si brillant enseignement. C'était aussi la jeunesse des écoles qui voulait rendre à ce maître vénéré un double tribut d'hommage et de reconnaissance. On distinguait ensuite une foule d'hommes dont les noms antiques rappelaient les plus beaux souvenirs de la France : ils ne pouvaient oublier la fidélité du savant à une race royale et infortunée, ni les preuves d'un dévouement d'autant plus pur qu'il avait éclaté dans des jours mauvais. On y voyait encore les dignitaires et les membres de toutes ces œuvres charitables dont il avait été le fondateur ou le coopérateur. Puis venaient les petits, les déshérités de ce monde, les pauvres qui composaient sa famille adoptive et qui pleuraient un bienfaiteur, un père ; et enfin les flots pressés d'une population dont il avait été, pendant de longues années, l'honneur et l'exemple.

Des discours furent prononcés sur sa tombe ; ils furent éloquents. Comment ne l'auraient-ils pas été en présence d'une telle vie et d'une telle mort ! Ils retracèrent à grands traits les travaux du savant ; ils racontèrent aussi les vertus et les nobles actions de l'homme de bien et du chrétien. Nous allons donner une analyse de ces discours ; ils feront mieux connaître qu'un simple récit les sentiments dont chacun était animé ; ce sont du reste des pièces désormais inséparables de l'histoire de l'illustre géomètre.

M. le baron Charles Dupin parla d'abord au nom de l'Académie des Sciences : « Nos regrets les plus légitimes, dit-il, doublent d'amertume quand la cause en est imprévue et quand le malheur frappe avec acharnement la même maison, qui commandait, à des titres divers, nos sympathies, notre estime et notre admiration.

« Nous venons rendre un dernier hommage au membre le plus célèbre d'une famille vénérable, affligée, il y a si peu de semaines, par la perte d'un magistrat honorable autant qu'honoré. (M. Alexandre Cauchy.)

» Celui-ci, du moins, avait laissé quelque intervalle entre le dernier de ses jours et les justes inquiétudes qu'inspirait à ses amis le déclin de sa santé; mais aucun de nous n'avait le soupçon de la perte irréparable que nous allions faire dans la personne de son frère, le membre de l'Institut.

» Permettez-moi d'indiquer, en termes généraux, pour que chacun puisse en concevoir l'idée, la recherche de longue haleine au milieu de laquelle M. Augustin Cauchy s'est trouvé surpris, enlevé à ses amis, à ses admirateurs.

» Jusqu'à la dernière séance qu'ait tenue l'Académie des Sciences, ce confrère, l'un des plus zélés, des plus assidus, et j'ose ajouter des plus illustres, prenait encore une part active et profonde à nos travaux. Il poursuivait la recherche d'un nouveau moyen de perfectionner les calculs, si délicats et si difficiles, du mouvement des astres qui composent notre système planétaire. Par un artifice ingénieux il étendait le domaine des séries au moyen d'un *régulateur* qui sépare, qui groupe des approximations successives, transformées en coefficients de ses puissances croissantes. Ce service accompli, le régulateur disparaît comme ces étamines cachées qui séparent, dans nos moulins perfectionnés, des atomes de plus

en plus impalpables et dont la somme est le produit désiré.

» Telles étaient, jusqu'au dernier moment, la fécondité et la vitalité d'un génie qui, depuis quarante-trois ans, ajoutait sans relâche aux découvertes de l'Analyse transcendante, à ses applications. Et déjà l'heure était marquée par le Créateur des hautes intelligences, où cet usage immortel des facultés d'un puissant esprit allait cesser tout à coup, et pour jamais, ici-bas! »

M. Ch. Dupin rappelle ensuite les principales circonstances de la vie du savant, il retrace les éclatants succès de ses débuts, les succès non moins brillants de son professorat; il raconte son entrée à l'Académie, son exil, son séjour auprès de la famille de Bourbon, et tâche de caractériser les traits essentiels d'une vie si bien remplie :

« Je terminerai, ajoute-t-il, cet hommage trop imparfait, par une réflexion involontaire sur le cortége qui se presse sur le bord d'une tombe illustre et modeste. La grandeur du monde et les prérogatives du pouvoir étalent à des funérailles la somptuosité, la pompe et l'éclat passager, impuissant contraste entre les vanités de la vie et l'humilité de la mort. Ici s'offre à nous un autre spectacle. Les hommes dont le génie a médité pour découvrir les vérités immuables de l'étendue, de la force et de ces nombres qui, suivant la parole éloquente de Platon, régissent le monde; ces hommes, nos contemporains, nos précepteurs, dont le génie a soulevé quelques-uns des voiles qui cachent les lois de l'univers, je les vois rassemblés ici pieusement, humblement autour de la tombe d'un confrère qui prit sa part dans leurs découvertes sublimes; leurs fronts s'inclinent à la pensée du maître souverain de ces lois, qui permet parfois que le génie de l'homme les découvre et s'identifie par la gloire à leur durée. Voilà la piété, voilà l'honneur des travaux de

l'esprit humain. Dans un semblable spectacle, qui n'est visible qu'à nos âmes, se révèle à nous, je ne saurais dire quelle alliance immortelle où les œuvres du Tout-Puissant contribuent à cette grandeur que Bâcon appelait la dignité, la majesté des sciences. »

M. Combes, Membre de l'Académie des Sciences, ancien disciple de Cauchy, prit ensuite la parole pour rappeler les services du professeur et pour rendre hommage à sa foi. Nous avons eu déjà occasion de citer quelques passages de ce discours remarquable. « La foi de M. Cauchy aux croyances de l'Église catholique, disait en terminant M. Combes, était absolue, active, ardente; elle n'admettait point, et sa conduite l'a bien prouvé, ce que l'on appelle des capitulations de conscience; mais elle était entièrement exempte de fiel et d'intolérance. C'était la foi naïve d'un enfant, celle que le Seigneur aime. »

M. Despretz, dans un discours prononcé au nom de la Faculté des Sciences, crut devoir encore insister sur le caractère élevé de la piété du savant. « M. Cauchy, dit-il, était simple, doux, pieux, charitable et du caractère le plus honorable. Resté fidèle aux convictions et aux attachements de sa jeunesse, il laissait aux autres leurs convictions et leurs attachements, quelque différence qu'il y eût entre ses sentiments et les leurs.

» Pénétré de l'excellence et de la vérité des principes du christianisme, profondément persuadé que la religion est une condition essentielle du bonheur de l'homme, il était toujours disposé à éclairer ceux qu'il croyait dans l'erreur, mais il attendait qu'on l'interrogeât sur ces matières délicates. Il sortait néanmoins de sa réserve habituelle si, en sa présence, on jetait le plus léger doute sur certains points de la religion, qu'il considérait comme des vérités éternelles. »

Mais c'est surtout à M. Guyon, maire de Sceaux, qu'était réservée la tâche de rendre hommage au chrétien. Quoique le zèle charitable de Cauchy fût bien connu, on ne savait pas à quel degré cette belle qualité était portée chez lui, tant sa modestie était sincère et son humilité profonde. Aussi le discours de M. Guyon fut pour un grand nombre une sorte de révélation; la foule silencieuse et attentive était comme suspendue aux lèvres de celui qui avait été le confident intime du défunt, le témoin oculaire de ses bonnes œuvres; et cependant il ne faisait que soulever un coin du voile ! Chose remarquable ! dans cette circonstance solennelle, l'émotion fut si générale, que beaucoup de personnes, peu habituées à s'attendrir aux funérailles d'un savant, se surprirent à verser des larmes. Ce discours caractérise trop bien la mémoire de Cauchy pour que nous ne le rapportions pas en entier.

« Avant que cette assemblée d'élite se sépare, dit M. Guyon, permettez, Messieurs, que le maire de la ville de Sceaux, interprète des plus chers sentiments de sa commune, vienne essayer d'apporter aussi au pied de cette tombe l'expression de ses regrets personnels et de la douleur unanime d'une population si soudainement, si cruellement frappée par la perte de son plus véritable ami.

» En venant s'établir au milieu de cette population, on pourrait dire que M. Cauchy l'adopta et qu'elle devint pour lui une seconde famille. Tous furent l'objet de ses sollicitudes : aux uns les secours matériels, aux autres les encouragements, à tous enfin l'exemple d'une vie irréprochable, de bons et utiles conseils, et surtout des enseignements capables de leur faire apprécier la grandeur de nos destinées futures.

» Les vieillards, les enfants, tout ce qui est intéressant et faible, était particulièrement l'objet de ses soins.

» Sans cesse occupé de bonnes œuvres, et ordinairement de plusieurs à la fois, s'il atteignait son but, il ne savait pas pour cela se reposer; mais l'ardeur infatigable de sa charité lui faisait trouver des occasions nouvelles de l'exercer encore.

» Presque tous les jours je recevais sa visite, souvent même plusieurs fois par jour; visites courtes, exemptes de vaines causeries : le temps était trop précieux pour celui qui en faisait un si digne emploi; c'était pour me recommander un pauvre infirme, un orphelin, une jeune fille à placer dans une maison hospitalière, un jeune soldat à rendre à une famille dont il était le soutien. J'admirais cette activité incessante, cette persistance de zèle qui ne se rebutait jamais. Il y avait dans notre si regrettable ami comme deux existences ou deux vies distinctes : la première, une vie chrétienne; puis une autre vie consacrée à l'étude de la science; toutes les deux si bien remplies, si complètes, qu'une d'elles aurait suffi à illustrer un homme; mais la première surtout le faisait bénir.

» M. Cauchy pensait qu'assurer à la jeunesse les bienfaits de l'instruction, et surtout d'une éducation morale et religieuse, était le plus grand service qu'on pût rendre à la société; aussi rien ne lui coûtait pour y réussir : soins, démarches, fatigues, argent, il prodiguait tout; il allait toujours en avant, sans s'effrayer des obstacles, marchant comme un véritable apôtre dans la voie qui devait le conduire au but : la moralisation de ses frères.

» C'est ainsi que cette Commune lui doit l'établissement des sœurs de Saint-André, une conférence de Saint-Vincent de Paul, un patronage pour les jeunes garçons, et l'introduction des Frères des Écoles chrétiennes comme école libre. Il avait rêvé davantage encore pour cette dernière institution: quelques jours de plus, et

peut-être aurait-il pu voir la réalisation de son œuvre chérie. Il y pensait sans cesse et surtout dans ses derniers jours. Pour en assurer le succès il avait fait de grands sacrifices pécuniaires, et comme je m'en étonnais un jour, il me dit avec une naïveté charmante : « Ne vous » effrayez pas, ce n'est que mon traitement, c'est l'Empe- » reur qui paye. » Vous n'avez pas oublié, Messieurs, à la faveur de quelle exception les chaires du haut enseignement public avaient été rouvertes à M. Cauchy, exception aussi honorable pour le Souverain qui accordait cette exemption politique au génie, que pour celui dont l'immense savoir et le noble caractère la provoquait, et qui savait en faire un si généreux usage.

» Toujours modeste, toujours oublieux de sa personnalité, M. le baron Cauchy était ingénieux à faire remonter à autrui le mérite de ses bonnes actions. Peu soucieux de son corps, on eût dit, tant il s'en inquiétait peu, qu'il n'était pas le sien, que s'en occuper n'était pas son affaire ; il ne songeait qu'à son âme.

» Peu d'instants avant sa mort, et lorsque des symptômes effrayants annonçaient qu'elle n'était que trop prochaine, il s'entretenait encore avec M. le Curé de la paroisse, comme s'il eût été en pleine santé ; il s'occupait toujours des intérêts de cette Commune ; il faisait des combinaisons nouvelles, des recommandations qu'il fallait, disait-il, ne pas manquer de me transmettre ; et comme il s'agitait beaucoup, M. le Curé, cherchant à le tranquilliser sur l'affaire qui l'occupait si vivement, l'engageait à rester calme, à seconder ainsi l'effet des prières qui allaient se faire à son intention dans une pieuse solennité : « Monsieur le Curé, dit-il en interrompant, les hommes passent, mais les œuvres restent : priez pour l'OEuvre. »

» C'est dans ces nobles et sublimes pensées que s'est éteinte cette illustre existence; c'est animé jusqu'au dernier instant de l'amour du bien public, et en contemplant le ciel, où il devait trouver sa récompense, qu'a fini le plus vertueux et le plus saint des hommes. Notre reconnaissance ne fera défaut ni à ses derniers vœux ni à son honorable mémoire. »

Nous ne passerons pas sous silence, parmi tant de précieux témoignages, les éloquentes et sympathiques paroles prononcées par M. le comte de Montalembert à la séance des cinq Académies, le 18 août 1857 :

« Douloureusement frappée par la perte de ce grand expérimentateur (M. Thenard), l'Académie des Sciences et l'Institut tout entier l'ont été presque au même instant par la perte de M. Cauchy, le premier peut-être de nos géomètres et le plus hardi des voyageurs dans les océans infinis des calculs. Vous savez comment la politique troubla sa vie sans jamais troubler son honneur ; comment il sut sacrifier à sa conviction tous ses intérêts, jamais ses principes ni ses amitiés ; comment il resta toujours infatigable et serein, voué à l'unique poursuite des conquêtes de l'abstraction et des richesses de l'analyse. Vous vous rappellerez longtemps cette grande taille, ce beau front, ce regard candide et lucide, qui, après avoir sondé les profondeurs de la mécanique céleste, s'abaissait si volontiers sur le jeune et modeste étudiant, sur le pauvre, sur l'enfant, sur tous ses frères souffrants. »

A tous ces hommages publics et éclatants vinrent se joindre des hommages privés, qui sont peut-être plus touchants encore. Dans les discours publics on peut craindre que l'orateur ne cède trop facilement au désir de faire ressortir les qualités de celui qu'il célèbre, et ne soit porté à quelque exagération dans la louange. Il en est

autrement dans des lettres intimes où le cœur parle seul, où les sentiments de la douleur, du regret, de l'estime, se produisent librement et dans toute leur sincérité. Nous allons rapporter quelques-unes de ces lettres qui achèveront notre récit. Et d'abord, il ne sera pas sans intérêt de montrer comment ceux-là même qui n'étaient pas dans l'intimité de Cauchy appréciaient le vide causé par sa mort. M. le premier Président Portalis répondait ainsi à une lettre de M. Eugène Cauchy :

« Lorsque j'ai reçu votre triste lettre, mon cher Monsieur, j'avais déjà été averti par l'Institut de l'accroissement de douleur et de la nouvelle épreuve que la Providence divine vient d'imposer à votre excellente famille et à vous. Ce coup, tout à fait inattendu pour moi, m'a vivement ému, d'abord à cause de vous, Monsieur, dont il aggravait la récente blessure, ensuite à cause du vide immense que laissera votre illustre frère dans les sciences où il tenait une si grande place, dans ces œuvres de miséricorde où il avait une si grande part, et enfin dans la société chrétienne où l'exemple de ses vertus, rehaussé par la profondeur de ses connaissances, était un si puissant sujet d'édification. Je ne l'avais pour ainsi dire qu'entrevu, mais j'avais été pénétré de la plus haute estime pour la simplicité de sa science, la modestie de sa piété et l'ignorance si sincère où il était de son mérite. C'est vous dire que je m'associe à vos regrets du fond de l'âme et au deuil de tous les siens. Pour lui je ne saurais douter qu'il n'ait obtenu ce qui faisait l'objet de ses plus constants efforts.

« Recevez, etc.

» Comte PORTALIS. »

Le cardinal Morlot dont la visite avait été pour Cauchy,

dans sa maladie, une marque d'affection si paternelle, fut du nombre de ceux qui ressentirent le plus vivement le vide causé par sa mort. On peut en juger par la lettre de condoléance qu'il s'empressa d'écrire à Mme Cauchy.

« Madame la baronne, personne plus que moi ne s'associe à votre douleur et à vos regrets. J'ai voulu que vous le sussiez tout d'abord et je viens vous demander la permission de vous le dire encore. Quel vide laisse près de vous et parmi nous l'événement auquel j'étais si loin de m'attendre jeudi dernier ! Mais la sainte Providence en avait autrement décidé, et le moment était venu, pour cette grande âme, de recevoir sa récompense. On ne peut s'attrister de cette fin comme on le ferait de toute autre ; et pour moi je me sens porté à invoquer celui qui nous a quittés, plutôt qu'à prier pour lui. Il y a, dans la pensée et la conviction de son bonheur, quelque chose qui adoucit merveilleusement les larmes et la douleur. Si de tels hommes ne semblent pas pouvoir être remplacés ici-bas, l'espoir d'avoir dans ces élus de Dieu de puissants protecteurs près de lui, console et soutient au milieu des larmes et des regrets. J'ai offert cependant l'auguste sacrifice pour le cher et vénérable défunt. Son souvenir est de ceux qui ne peuvent désormais s'effacer de mon cœur ; le vôtre y reste uni au sien et celui de votre famille si éprouvée, mais si chère à Dieu par cela même. Veuillez agréer, Madame la baronne, mon plus respectueux dévouement en Notre-Seigneur.

» † F. N. Card. Archev. de Paris. »

La Famille Royale, à laquelle Cauchy avait donné tant de preuves d'un dévouement inaltérable, ne pouvait demeurer indifférente dans cette triste circonstance. Mme la vicomtesse de l'Escalopier avait écrit, de la part de sa mère, pour annoncer la douloureuse nouvelle. M. le

comte de Montbel répondit de Froshdorf en ces termes, au nom de la cour exilée :

« Madame la vicomtesse, j'ai rempli avec un douloureux empressement les intentions de Madame votre mère, en mettant sous les yeux de M. le comte et de Mme la comtesse de Chambord la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser. Nos princes ont appris avec de vifs regrets que votre illustre père était enlevé à sa famille dont il faisait le bonheur, à la science dont il était l'une des gloires les plus élevées et les plus pures, aux gens de bien et d'honneur à qui sa loyauté et ses vertus religieuses servaient d'encouragement, de guide et de modèle.

» M. le comte de Chambord aime à se compter au nombre de ses élèves les plus affectueux et les plus reconnaissants. La science et la religion vivaient étroitement unies dans l'âme de ce juste, que Dieu, dans sa lumière infinie, récompense de son inaltérable fidélité. En apprenant sa mort, Monseigneur a ordonné de célébrer sans retard un service à son intention, dans la chapelle du château, et la cour exilée, en deuil, s'est unie bien sincèrement devant Dieu à toutes vos douleurs, à tous vos regrets, à toutes vos prières.

» En vous priant de remettre la lettre ci-jointe à Madame votre mère, j'ai l'honneur de vous transmettre l'expression de l'affectueux intérêt de nos princes pour vous et tous les vôtres.

» Une véritable amitié m'unissait à Monsieur votre père; mon cœur restera fidèle à sa mémoire. Il ne m'a pas été donné de le revoir dans notre patrie d'ici-bas. Puisse-je le rejoindre dans cette patrie qui ne connaît ni les séparations, ni l'exil!

» Veuillez présenter, etc.

» MONTBEL. »

Voici maintenant en quels termes le prince voulut lui-même rendre un suprême hommage à la mémoire de son ancien précepteur :

« J'apprends, Madame la baronne, le malheur qui vient de vous frapper, et je veux vous dire moi-même la part bien vive que je prends à votre profonde affliction. Dans celui que vous pleurez, la science perd un de ses plus rares génies, l'Église un de ses plus humbles enfants, la cause du droit un de ses plus fidèles serviteurs, et moi un de mes meilleurs amis. J'avais toujours espéré le revoir. J'aurais été si heureux de le remercier encore de tout ce qu'il a fait pour moi ! Notre seule consolation, dans notre commune douleur, est de penser qu'il reçoit maintenant au ciel la récompense de ses vertus, de son ardente charité, de son dévouement à toute épreuve, de sa pieuse vie et de sa sainte mort. Il ne cessera de prier dans le sein de Dieu pour tout ce qu'il a tant aimé dans ce monde, pour sa famille, pour la France, et, j'en suis sûr, aussi pour moi. De mon côté, croyez bien que sa mémoire me sera constamment précieuse et chère. Ma femme s'associe comme moi à vos justes regrets. Soyez, dans cette triste circonstance, notre interprète auprès de vos filles et de tous les vôtres, et comptez sur mes sentiments bien sincères.

» HENRI. »

CHAPITRE XIX.

PARALLÈLE DE CAUCHY ET DE PASCAL.

> Les grands génies ont leur empire; ils sont vus, non des yeux, mais des esprits; c'est assez.
>
> PASCAL.

Traits communs de caractère. — Comparaison des travaux scientifiques. — La jeunesse, âge des grandes découvertes. — Pascal littérateur et philosophe. — Le livre des Pensées. — Lettres provinciales. — Influence du Jansénisme sur Pascal. — Cauchy défenseur des Jésuites. — La foi chez Pascal et chez Cauchy. — Austérité de Pascal. — Sa sévérité pour les autres. — Conclusion.

Lorsque des hommes de génie se sont illustrés dans la même carrière et ont excellé dans les mêmes travaux, notre esprit se plaît naturellement à rapprocher leurs œuvres, à interroger leurs vies, à mettre en évidence les mobiles et le caractère personnel de leurs actes, à faire ressortir enfin les traits qui les rapprochent comme les différences qui les distinguent. Sous ce rapport il nous a semblé qu'il ne serait pas sans intérêt de mettre ici en parallèle deux noms également chers, à des titres divers, aux amis de la religion et à ceux de la science : ce sont les noms de Blaise Pascal et d'Augustin Cauchy. Quelque grande que soit la figure de Pascal, la vie que nous venons de raconter ne nous paraît pas indigne d'être prise pour sujet d'une étude comparative entre les moyens divers par lesquels peut se poursuivre un même but.

La science, la fidélité au devoir, la foi religieuse constituent les titres de gloire incontestables de Cauchy; ce furent aussi les traits les plus saillants du génie et du ca-

ractère de Pascal. Ce grand homme a fait admirer dans la science autant de puissance que de profondeur ; sa fermeté dans ses convictions et sa ténacité opiniâtre dans ce qu'il considérait comme le devoir, allèrent souvent jusqu'à l'excès; enfin rien n'est plus connu que son ardeur extrême dans les choses de la foi. Tels sont les divers points de comparaison que nous allons successivement parcourir.

Pascal était doué d'une aptitude exceptionnelle pour l'étude des sciences, et, pendant sa courte carrière, il a réalisé une foule de travaux des plus importants. Dès la première jeunesse ses facultés admirables se font jour; à peine âgé de douze ans, et livré à ses propres forces, il refait la géométrie d'Euclide. Un peu plus tard, à l'âge de dix neuf ans, il imagine une machine ingénieuse restée célèbre sous le nom de *Machine arithmétique*, au moyen de laquelle on réalisait, par un simple mécanisme, les calculs les plus compliqués sur les nombres. Ses méditations se portent ensuite vers la théorie des combinaisons; il résout plusieurs problèmes relatifs aux jeux de hasard et pose ainsi les bases du calcul des probabilités. Les expériences de Toricelli le conduisent encore à s'occuper de la question de la pesanteur de l'air, et il en donne la solution, en montrant que la hauteur barométrique diminue à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère. Son beau frère Périer entreprend, d'après ses indications, l'ascension du Puy-de-Dôme et y constate sur le baromètre une diminution de plusieurs pouces, pendant que lui-même fait, en petit, la même expérience à Paris au sommet de la tour Saint-Jacques. Enfin, pendant une maladie, où des maux de tête intolérables lui causaient une insomnie continuelle, il étudie la question des *roulettes* et résout, à cette occasion, une foule de problèmes qui avaient arrêté avant lui les plus habiles géomètres.

Ce sont là des travaux de premier ordre; cependant, même en tenant compte de la différence des temps, on doit reconnaître qu'ils ne sont à comparer, ni pour l'importance, ni pour l'étendue, aux grandes découvertes de Cauchy, surtout en analyse. C'est donc à ce dernier que demeure ici l'avantage. On doit remarquer, il est vrai, que Pascal ayant été enlevé jeune encore (à trente-neuf ans) par la mort, on ne saurait sans injustice se plaindre de ce qu'il n'ait pas laissé un ensemble plus considérable de travaux; mais on pourrait aussi répondre que les grandes découvertes ne sont ordinairement le fruit, ni de la vieillesse, ni même de l'âge mûr. Les plus illustres génies qui aient contribué au progrès des sciences mathématiques avaient découvert, dès leur jeunesse, les principes des théories qui ont immortalisé leur nom. C'est au début de sa carrière que Képler posa les bases de ses lois admirables; Galilée venait à peine de quitter les bancs de l'école lorsqu'il découvrit les lois de la pesanteur, son plus beau titre de gloire; Newton n'avait encore que vingt-quatre ans, et déjà il était en possession de ce merveilleux principe de l'attraction universelle à l'étude duquel il devait consacrer le reste de sa vie. Il est facile de comprendre la raison de ce fait remarquable. Pour analyser les problèmes délicats et abstraits de la science et pour s'élancer hardiment dans le champ des découvertes vraiment neuves, il faut une vivacité d'intuition, une flexibilité de génie qui ne se rencontrent guère que dans la jeunesse. Plus tard, un savant peut bien développer ses pensées premières, les compléter, en tirer toutes les conséquences; mais, si l'on y regarde d'un peu près, on voit qu'il ne récolte ordinairement que ce qu'il a semé au commencement de sa carrière.

Ce que nous avons raconté d'Augustin Cauchy ne fait

que confirmer cette vérité d'observation. Lui aussi s'était signalé par des dispositions précoces, et, dès l'âge de douze ans, l'illustre Lagrange n'hésitait pas à déclarer qu'il voyait en lui l'espoir de la science. Il n'avait pas encore atteint vingt-cinq ans, et déjà il avait produit ces beaux Mémoires, dont nous avons essayé de donner une idée, et qui, de 1810 à 1815, excitèrent si vivement l'attention et l'admiration du monde savant. Ajoutons enfin que ses travaux les plus importants sont antérieurs à 1830, de sorte que, avant l'âge de quarante ans, il avait cueilli ses plus belles palmes dans le champ de la science. Il continuera sans doute de consacrer, jusqu'à la fin, à l'étude ses forces et ses veilles, et il ne cessera de réaliser des progrès essentiels, mais tous seront le résultat et comme l'épanouissement de ses premières recherches.

Si l'on veut juger de la valeur d'une idée nouvelle, il faut surtout examiner la nature et la portée de ses conséquences; la fécondité est le caractère propre de toute création. Les lois de Képler ont renouvelé l'astronomie; les recherches de Galilée sur la pesanteur ont fondé la mécanique; les méditations sublimes de Newton sur l'attraction universelle ont donné la clef de tous les phénomènes célestes; tout ce qu'on a fait depuis eux n'est que le corollaire de leurs admirables inventions. On ne saurait attribuer à Pascal une gloire semblable; ses travaux se distinguent plutôt par le mérite de la difficulté vaincue, par la sagacité et l'habileté de l'investigation; mais il n'a pas été créateur et n'a pas produit de disciples. Cauchy, au contraire, a laissé dans la science de véritables créations, il a eu d'illustres disciples, et ses travaux ont renouvelé presque toutes les branches des mathématiques. Ajoutons encore qu'à l'époque où Cauchy est venu, la science semblait presque atteindre à son apogée; on

pouvait croire jusqu'à un certain point qu'il ne restait plus qu'à en perfectionner les détails. Au XVIe siècle au contraire, la science était, pour ainsi dire, tout entière à créer; un champ immense et inexploré s'ouvrait tout à coup à l'activité des chercheurs : c'était le moment des abondantes récoltes; mais, à mesure qu'on avançait, la carrière s'était rétrécie et l'exploitation des filons scientifiques devenait de plus en plus difficile. Déjà, à la fin du siècle dernier, Lagrange se plaignait amèrement d'être venu trop tard et de n'avoir plus, comme Képler et Newton, un monde à découvrir et à expliquer; il lui arrivait même quelquefois d'envier le bonheur de Monge, qui, par ses travaux originaux sur la géométrie descriptive, avait trouvé le moyen de prendre rang parmi les génies créateurs. La gloire d'être inventeur deviendra donc de plus en plus rare dans les sciences, et Cauchy appartient à ce très-petit nombre d'hommes qui ont pu y prétendre encore dans notre siècle.

Après le savant, considérons maintenant le littérateur et le philosophe. Ici Pascal reprend tout l'avantage; il a, sous ce rapport, une supériorité tellement marquée que, dans toute l'histoire des sciences, on trouverait à peine un nom à lui opposer. Quelle puissance et quelle profondeur dans la pensée! Quelle énergie et quelle perfection dans le style? Châteaubriand a dit de Pascal qu'il était doué « d'un génie effrayant; » c'était surtout du philosophe qu'il voulait parler. Descartes et Leibnitz lui sont peut-être supérieurs à certains égards; ils ont écrit sur le mécanisme du monde et sur la raison de l'homme, cet autre univers, des analyses plus savantes; ils ont laissé des méthodes plus fécondes; ils ont de plus formé des écoles; mais qu'ils sont loin de la grandeur imposante de la pensée de Pascal, de la vigueur incomparable de

son style! Dans la philosophie, pas plus que dans les sciences, Pascal n'a fondé d'école, ni laissé de disciples; il est seul, isolé au milieu de la foule qu'il surpasse de toute la hauteur de son prodigieux génie; et cependant il suffit à sa propre gloire, et le temps ne fait que la développer encore.

Cauchy ne saurait être comparé à Pascal sous ce point de vue; cependant il s'est montré lui-même écrivain et philosophe, et de plus philosophe chrétien. Il ne sera donc pas inutile de rapprocher au moins les principes et les maximes qui inspiraient ces deux illustres savants.

Ce qui domine chez Pascal, c'est la passion; elle respire dans tous ses écrits, elle en constitue à la fois le nerf et le défaut. S'il traite une question de morale ou de religion, il se monte et s'échauffe aussitôt; il soulève à plaisir la contradiction pour amener la lutte, il s'irrite contre l'obstacle; loin d'éviter l'écueil, il le recherche avec empressement et l'aborde avec fierté, au risque de s'y briser. Que l'orgueilleuse raison humaine ne prétende pas réclamer des droits! il prend plaisir à la contredire, à l'humilier, à lui prouver son néant. Et ce n'est pas là un ingénieux paradoxe, un thème oratoire ou bien un simple jeu d'esprit. Pascal avait été assailli par le démon du doute; le scepticisme, avec ses inexorables dilemmes, avait frappé de bonne heure à la porte de son âme; il avait combattu avec l'énergie du désespoir, et ses écrits retracent sans cesse le tableau émouvant de ses luttes. Sa philosophie est triste et maladive, mais c'est le malade lui-même qui raconte ses infortunes; dès lors on s'intéresse à son mal, on s'identifie à ses désolations et à ses douleurs. Le livre des Pensées est en effet l'histoire vivante et personnelle d'une âme grande et souffrante. L'intérêt qui s'attache à cet ouvrage s'est encore accru

depuis que des recherches récentes en ont rétabli le texte et l'esprit véritable. Les solitaires de Port-Royal, effrayés des hardiesses de l'auteur, en avaient supprimé tout ce qui leur avait paru trop audacieux; ils avaient voulu le présenter au public sous la forme d'un livre de piété, âpre et sévère comme leurs doctrines. La critique a rétabli l'esprit réel du livre, qui est celui du scepticisme. Pascal n'était nullement sceptique comme chrétien, cela n'est pas douteux; mais il l'était sur beaucoup de points comme philosophe, et c'est précisément le sentiment exagéré de l'impuissance de la raison qui l'avait traîné vaincu et, pour ainsi dire, tout palpitant aux pieds de la religion. Il ressemble à un homme qui, pris de vertige à la vue d'un précipice, se rejette violemment en arrière; à un naufragé qui, sur le point d'être englouti, saisit avec une ardeur fiévreuse la planche du salut.

Augustin Cauchy n'a point connu ces luttes terribles; sa philosophie est douce, calme et sereine; son esprit, essentiellement positif, ne se laissait point abuser par le paradoxe; aux inventions profondes et subtiles de la pensée il préférait les doctrines simples et pratiques. Tandis que, sous le vestibule du temple, Pascal livre à la raison un combat furieux et acharné, Cauchy a pénétré jusque dans le sanctuaire et y a trouvé la paix de l'âme et le repos du cœur. Sa foi n'a cependant rien de superficiel ni de vulgaire, il en a sondé les mystères et discuté les principes, il lui a donné une forme scientifique; toutefois il n'a jamais commis l'imprudence de s'attaquer à la raison elle-même; il la considérait comme une personne sage et de bonne composition, mais qu'il ne faut point pousser à bout, car elle a alors pour ses adversaires d'implacables rigueurs.

Et d'ailleurs, quels résultats utiles a produits la sombre

philosophie de Pascal? On les chercherait en vain. On admire le penseur, on assiste avec émotion au spectacle de ses luttes et de ses angoisses; mais on refuse de le suivre et on résiste à ses arguments les plus vigoureux. Quel homme a jamais été amené, par exemple, à croire à l'existence de Dieu par ce raisonnement singulier et paradoxal, où la question est ramenée à un pari et la preuve à un calcul de probabilité? On sent ici clairement toute la faiblesse de la méthode philosophique de Pascal. Il y a, de plus, dans ce procédé, quelque chose de particulièrement blessant pour la dignité humaine : nos volontés veulent être attirées et non forcées; Dieu lui-même repousse nos hommages s'ils ne sont libres et spontanés. La raison proteste, et non sans droit, contre de telles entreprises

Un autre titre de gloire de Pascal, c'est son habileté dans l'art dangereux de la satire. Nul avant lui n'avait fait preuve d'un esprit plus fin et plus souple, nul n'avait manié avec plus de verve la plaisanterie mordante ou la sanglante ironie; nul, après lui, n'a même approché du rang qu'il a su conquérir. « Pascal est le premier des satiriques français, a dit Voltaire; Boileau n'occupe que la seconde place. » Cet éloge compromettant ne saurait toutefois être contesté; les *Provinciales* le justifient amplement.

Ici se présente naturellement entre les deux savants un rapprochement trop curieux pour ne pas être signalé. Pascal, partisan ardent des Jansénistes, livra aux Jésuites de son temps une guerre acharnée dont l'éclat retentissant est parvenu sans faiblir jusqu'à nous et se continuera, sans doute, bien longtemps encore; parmi les nombreux adversaires que chaque époque suscite contre la célèbre compagnie, il n'en est pas qui lui aient porté des coups plus terribles. Ce n'est certainement pas un des traits les

moins piquants de cette lutte si souvent renouvelée, que de voir, deux siècles après Pascal, un autre grand géomètre chrétien qui n'hésite pas à prendre avec ardeur la défense de cette même Société et à plaider sa cause devant l'opinion irritée, en prenant pour base de sa polémique le double point de vue de la bonne foi et de l'intérêt véritable de la science.

L'influence des doctrines Jansénistes avait été mauvaise pour Pascal, à plus d'un titre. Son esprit était naturellement religieux, sa foi profonde et sa piété sincère. Et cependant, au contact de ces doctrines, ses sentiments religieux se transforment et s'altèrent. Sa foi prend une teinte sombre et farouche; sa piété devient raide et sauvage; son caractère irascible et atrabilaire. Son esprit se remplit de fantômes et de terreurs; les jugements de Dieu le glacent d'épouvante; on dirait par moment que la trompette éclatante du dernier jour a retenti à son oreille.

Combien la foi de Cauchy est plus douce et plus aimable, sa piété plus attrayante et plus éclairée! Pascal n'a connu que le commencement de la sagesse : la crainte. Cauchy en a atteint la perfection, dans la confiance et l'amour. Lui aussi avait ressenti les exigences de la conscience, les rigueurs du devoir, et il n'avait pas hésité à leur faire de pénibles sacrifices. Mais en même temps qu'il se montrait sévère à lui-même, quelle tolérance pour les autres, quelle modération et quelle simplicité dans ses démarches, quelle douceur et quelle sérénité dans son âme et dans son cœur!

La sévérité des principes de Pascal avait fini par le rendre intolérant et insupportable pour son entourage. Il est vrai qu'il donnait, le premier, l'exemple d'une austérité extrême. Celui qui gourmandait sa sœur avec aigreur, parce qu'elle prenait plaisir aux innocentes caresses de ses enfants, n'était pas homme à user envers lui-même

de délicatesse et de ménagement. Il traitera également son corps avec toute la rigueur d'un cénobite; il fera son ménage de ses propres mains; la nourriture de chaque jour sera exactement pesée; bien ou mal disposé, le corps devra remplir son office; s'il essaye de se révolter, les disciplines, les cilices et les pointes en auront raison.

Cauchy était fort éloigné d'une telle exagération; il n'étendait pas les pratiques de mortification au delà de ce que prescrivent si sagement les lois de l'Église. Cependant cet oubli des nécessités matérielles, que Pascal poussait si loin, n'est pas sans quelque trait de ressemblance avec ce que nous retrouvons dans la vie de Cauchy, mais avec un esprit bien différent. « Peu soucieux de son corps, disait M. le maire de Sceaux, on eût dit, tant il s'en inquiétait peu, qu'il n'était pas le sien, que s'en occuper n'était pas son affaire; il ne songeait qu'à son âme. » On ne peut douter en effet qu'il a épuisé son corps au service de la science et des bonnes œuvres, en lui refusant tout repos lorsqu'il s'agissait de suivre l'élan de son âme ardente; mais, en agissant ainsi, il ne prenait pas à tâche de l'affaiblir volontairement par un système de macérations réfléchies; il le traitait moins comme un esclave rebelle que comme un instrument dont l'âme doit toujours rester maîtresse.

Terminons ici le parallèle que nous avons essayé de tracer entre ces deux hommes célèbres. Ils ont rendu tous les deux à la science d'éclatants services; tous les deux se sont honorés, dans des voies différentes, par la dignité de leur caractère; tous les deux enfin ont réalisé, à un degré peut-être inconnu avant eux, l'alliance admirable d'un grand génie scientifique avec une foi profonde et vigoureuse. A ce dernier titre surtout, leur gloire doit être chère à tous les chrétiens, car leur exemple montre com-

bien sont vaines les prétentions de ceux qui voudraient séparer la science et la religion. Quand on voit ces deux grandes choses réunies avec tant d'éclat chez des hommes d'un génie aussi sublime, il faut bien renoncer à des préjugés ridicules, à des accusations absurdes qui ont pour origine l'ignorance ou la passion, et l'on arrive forcément à conclure, avec l'illustre géomètre dont nous avons entrepris de raconter les travaux, « que l'intérêt le plus pressant des sciences, de celles-là même qui paraissent le plus étrangères à la religion, est de se rattacher, comme des rameaux, à l'arbre divin, qui seul peut leur donner la vie et les rendre vraiment fécondes. »

FIN DU TOME PREMIER.

LA VIE ET LES TRAVAUX

DU

BARON CAUCHY.

Dr. Herm. Kortum

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (Tome II) a été fait à Paris dans le cours de 1868, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut

LA VIE ET LES TRAVAUX

DU

BARON CAUCHY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES;

PAR

C.-A. VALSON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE;

AVEC UNE PRÉFACE DE M. HERMITE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

TOME II. — PARTIE SCIENTIFIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1868

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

INTRODUCTION.

Dans la première Partie de cet Ouvrage, j'ai raconté la vie d'Augustin Cauchy, et j'ai présenté en même temps un exposé sommaire de ses principales découvertes considérées au point de vue historique. C'est là qu'on trouvera tous les détails qui peuvent intéresser les savants sur les circonstances au milieu desquelles ces découvertes ont pris naissance; je n'aurai donc pas à y revenir. Ce second volume s'adresse particulièrement aux hommes spéciaux qui voudront connaître plus à fond les doctrines de l'illustre géomètre et s'orienter parmi ses innombrables productions.

Les travaux scientifiques de Cauchy comprennent une longue période de quarante-sept années, de 1810 à 1857; ils embrassent à peu près toutes les branches des sciences mathématiques, depuis la théorie des nombres et la géométrie pure jusqu'à l'astronomie et l'optique. On comprend dès lors la nature des difficultés que rencontrent les hommes d'étude quand ils entreprennent de résumer, sur un point déterminé, les idées et les recherches du savant. Pour analyser une théorie, pour retrouver un énoncé, une simple formule, autrefois entrevue, aujourd'hui oubliée, il faudra feuilleter des volumes entiers, et souvent, à défaut d'un guide, on sera exposé à perdre

un temps précieux dans une perquisition fatigante. Mais il y a plus : les écrits de Cauchy se trouvant disséminés dans une foule de recueils qu'il n'est pas également facile de se procurer, on pourra toujours craindre d'avoir fait des recherches incomplètes. C'est assez montrer l'utilité d'un ouvrage dans lequel on trouvera un répertoire complet et méthodique des travaux de divers ordres dus à un génie d'une fécondité si extraordinaire.

Toutefois, une simple nomenclature bibliographique eût été insuffisante; il convenait d'y joindre certains commentaires afin de faire connaître la nature des Mémoires cités, de donner une idée exacte des matières qui y sont traitées et de montrer comment ils se rattachent les uns aux autres pour former un corps de doctrine. Je m'étais d'abord proposé de présenter, sur chaque Mémoire, une courte analyse du sujet, avec le résumé des méthodes employées, l'énoncé des principaux théorèmes et l'indication des formules les plus remarquables. Mais j'ai bientôt reconnu qu'un travail de ce genre m'entraînerait beaucoup au delà des limites dans lesquelles je devais me renfermer. La liste pure et simple des Mémoires de Cauchy formerait à elle seule presque un volume, et, quel que soit d'ailleurs le mérite d'une analyse, rien ne pourrait dispenser, dans des matières d'un ordre si élevé, de recourir aux écrits originaux. Un des disciples les plus distingués de Cauchy, M. l'Abbé Moigno, a entrepris cette tâche en ce qui concerne le Calcul différentiel et intégral; trois forts volumes ont déjà été publiés, et l'ouvrage n'est pas encore terminé. J'ai donc été obligé

de me placer à un point de vue plus modeste, et je vais expliquer en quelques mots le plan que j'ai suivi.

Il était d'abord nécessaire de faire une revue générale des écrits publiés par Cauchy pendant sa longue carrière, et d'en dresser un catalogue exact et complet. Cette partie de ma tâche n'a pas été sans difficulté à cause de la rareté de plusieurs des recueils où ils ont paru. Les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, le *Journal de M. Liouville*, le *Journal de l'École Polytechnique*, etc., se trouvent, il est vrai, à peu près dans toutes les mains, mais d'autres collections sont beaucoup plus rares; tels sont les *Annales de Gergonne*, le *Bulletin de Férussac*, le *Bulletin de la Société Philomathique*, etc. Les anciens *Exercices de Mathématiques* sont eux-mêmes depuis longtemps épuisés, et je dois aux bons offices de M. Gauthier-Villars d'avoir pu me procurer le dernier exemplaire disponible dans le commerce. La difficulté était encore plus grande pour les Mémoires détachés qui ont été publiés en assez grand nombre par Cauchy pendant les huit années de son séjour hors de France. La plupart de ces Mémoires ont été simplement lithographiés à un petit nombre d'exemplaires et n'ont pas reçu d'autre publicité; aussi quelques-uns d'entre eux ont disparu presque complétement : pour en avoir connaissance, j'ai dû m'adresser à la Bibliothèque de l'Institut. Je citerai, comme exemple, les Mémoires si importants publiés à Turin, en 1831 et 1832, sur le *Calcul des résidus* et la *Mécanique céleste* : on en trouve sans doute une reproduction partielle dans le recueil des nou-

veaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique;* mais plusieurs sections manquent, en particulier celle qui concerne l'application du calcul des résidus à la théorie des équations algébriques, dans laquelle est exposée, pour la première fois, la démonstration du célèbre théorème sur le nombre des racines comprises à l'intérieur d'un contour déterminé. En présence de ces difficultés, je pouvais donc craindre que mon travail n'offrît quelques lacunes regrettables dans l'énumération des Mémoires de Cauchy. Une circonstance heureuse est venue dissiper mes incertitudes à cet égard.

Dans les dernières années de sa vie, Cauchy, cédant aux instances souvent réitérées de ses amis, s'était enfin décidé à entreprendre ce travail de révision qui lui avait été tant de fois demandé, et il avait commencé par préparer un catalogue complet de tous ses écrits. Il chargea de ce soin l'un de ses disciples, le P. Jullien, de la compagnie de Jésus, dont le mérite scientifique est d'ailleurs trop bien connu pour qu'il soit nécessaire d'en faire l'éloge. Le P. Jullien se mit donc à l'œuvre, sous les yeux et dans le cabinet même de l'illustre savant, qui l'aidait de ses conseils et mettait à sa disposition les ressources de sa riche bibliothèque. Son répertoire manuscrit, qui remplit trois gros cahiers, n'a jamais été publié; mais l'auteur a bien voulu me le confier avec une généreuse libéralité, et c'est à cette bienveillante communication que je dois de pouvoir présenter mon propre travail comme étant aussi complet que possible. Est-ce à dire qu'il n'y ait absolument aucune omission? Je n'ose-

rais l'affirmer. Pendant les recherches dont je viens de parler, Cauchy hésitait quelquefois dans ses indications et ne conservait qu'un souvenir un peu confus de certains Mémoires anciens; mais si, dans ces conditions, l'auteur lui-même a pu commettre quelques oublis, ils me seront, je l'espère, facilement pardonnés à moi-même. Enfin, je ne crois point trop m'avancer en disant que si, malgré tous mes soins, un très-petit nombre d'écrits ont échappé à mon énumération, ils n'ont qu'une importance secondaire.

La distribution des matières par Chapitres offrait une autre sorte de difficulté. J'aurais voulu pouvoir réunir sous un même titre tous les Mémoires relatifs à une même théorie; mais cela n'était pas possible, soit parce que la plupart de ces Mémoires se rapportent à la fois à plusieurs théories distinctes, soit parce que, pour traiter complétement un sujet déterminé, il faut recourir à des Mémoires de nature très-différente. Par suite, il était également impossible de répartir les matières de telle sorte que chaque Chapitre fût indépendant des autres et ne supposât rien de ceux qui suivent. Les recherches si variées de Cauchy sont, en général, toutes solidaires les unes des autres, ce qui établit entre elles un lien intime. Dans la théorie des équations algébriques, par exemple, on trouve des applications des théories les plus diverses : la discussion des propriétés des racines exige l'analyse des symboles imaginaires; la nature même de ces racines et leur composition en fonction des coefficients reposent sur l'étude approfondie des fonctions symétriques

et des substitutions; le théorème sur les racines comprises entre des limites données dépend des considérations les plus délicates empruntées au calcul des résidus et à la théorie des intégrales définies. D'un autre côté, plusieurs théories, telles que le calcul des résidus, s'appliquent à un grand nombre de questions essentiellement distinctes, en analyse, en mécanique et en physique; il n'était donc pas possible de réunir sous un même titre tout ce qui concerne cette méthode fondamentale. L'ordre chronologique ne pouvait pas non plus être adopté, par la raison que Cauchy s'est occupé des mêmes questions à des époques fort éloignées les unes des autres, reprenant sous une forme différente des questions déjà résolues, perfectionnant ses procédés et déduisant de ses recherches antérieures des conséquences nouvelles. Une exposition faite en voulant suivre pas à pas ces diverses transformations n'aurait pu éviter d'être embarrassée ou confuse.

Mais, dans chacun des Mémoires de Cauchy, lors même qu'ils n'ont pas un objet unique, on trouve généralement un certain nombre de questions principales qui se rapportent plus particulièrement à une branche déterminée des mathématiques, et la nature de ces questions permettait d'assigner leur place dans l'ensemble, sauf à rappeler plusieurs fois les Mémoires dont l'objet est multiple. Tel est en effet l'ordre que nous avons suivi. Quant à la succession des Chapitres, ils seront placés suivant le rang qu'on a coutume d'assigner aux diverses théories dont se composent les sciences mathématiques.

L'arithmétique, la théorie des nombres, la géométrie pure ou appliquée, se présentent les premières. Viennent ensuite : l'analyse proprement dite avec ses méthodes variées, les intégrales définies, le calcul des résidus et des limites, les fonctions symétriques et les substitutions, les fonctions périodiques inverses, ainsi que leurs applications aux équations algébriques, aux séries, aux équations différentielles, etc. Enfin, les trois derniers Chapitres comprendront les recherches relatives à la mécanique, à l'optique et à l'astronomie.

Dans chaque section on trouvera une indication complète de tous les Mémoires qui s'y rapportent, de manière que, d'un seul coup d'œil, on puisse immédiatement se former une idée exacte des travaux de Cauchy sur chaque spécialité de matières, et qu'on soit en mesure de retrouver, sans perte de temps, les Mémoires qu'on aura besoin de consulter. De plus, afin qu'il soit facile d'apercevoir tout d'abord quelle est l'étendue, et, par suite, l'importance d'un document cité, j'ai eu soin d'indiquer le nombre des pages qu'il contient, toutes les fois que ce nombre dépasse vingt pages. Lorsque plusieurs Mémoires relatifs à un même sujet portent des titres semblables et sont insérés dans le même volume, je les réunis sous un titre commun, avec des renvois distincts aux pages de ce volume. Dans le même dessein d'abréger et de simplifier la forme des renvois, j'emploie, pour désigner chaque volume des œuvres d'Augustin Cauchy ou des collections dans lesquelles sont contenus ses Mémoires, une série de notations particu-

lières dont on trouvera le tableau dans une feuille séparée. Je dois ajouter que, dans chaque Chapitre, j'ai suivi pour les citations l'ordre d'ancienneté des recueils, ce qui tend à replacer les travaux de Cauchy dans leur ordre chronologique pour les matières contenues dans chaque section déterminée. Enfin, lorsque l'ensemble des matières d'un Chapitre se prête facilement à des subdivisions, celles-ci sont caractérisées par des titres séparés.

Les premiers travaux de Cauchy ont été publiés dans les *Mémoires des Savants étrangers* (Académie des Sciences) et dans le *Journal de l'École Polytechnique*. On en trouvera aussi un certain nombre dans le *Bulletin de Férussac*, dans le *Bulletin de la Société Philomathique* et dans les *Annales de Gergonne*. A cette première période se rattachent encore plusieurs ouvrages classiques composés à l'occasion des leçons données à l'École Polytechnique; ce sont principalement : le *Cours d'Analyse*, le *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal*, les *Leçons sur le Calcul différentiel* et les *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la géométrie*. A partir de 1825, on trouve un certain nombre de *Mémoires détachés* : le Mémoire « sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires », le Mémoire « sur les applications du calcul des résidus à diverses questions de Physique mathématique », et un autre concernant la « théorie des équations algébriques ». En même temps Cauchy publiait, sous le titre d'*Exercices de Mathématiques*, un recueil périodique qui fut brusquement interrompu en 1830 sous l'influence des événements politiques. Pendant son séjour à Turin, Cauchy composa les

Résumés Analytiques et plusieurs Mémoires lithographiés de la plus haute importance sur le calcul des résidus et les applications à la mécanique céleste. Son séjour en Allemagne, près du roi Charles X, est signalé par les Mémoires « sur la dispersion de la lumière » et par divers autres Mémoires sur l'analyse, notamment « sur la théorie des équations différentielles ». En 1836, l'inauguration des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* vint lui offrir une nouvelle voie de publication plus particulièrement en rapport avec la tournure de son esprit. Habitué à scruter sans relâche les idées nouvelles qui sollicitaient son génie, et plus porté à faire progresser la science qu'à conduire à la perfection des travaux isolés, il trouvait dans ce recueil hebdomadaire le moyen de transmettre sans retard au monde savant le résultat de ses investigations incessantes. Dès l'année 1836, on rencontre dans les *Comptes rendus*, sous la forme de Lettres adressées à divers membres de l'Académie, une série de communications du plus haut intérêt; à partir de 1838, Cauchy, étant revenu en France et ayant repris sa place à l'Académie, commence une longue série de Mémoires qui se poursuit jusqu'en 1857, et qui embrasse dans son ensemble les sujets les plus variés et les plus élevés. C'est là qu'on peut suivre de près, et pour ainsi dire jour par jour, non-seulement les travaux de l'illustre savant, mais encore les phases diverses par lesquelles passait son génie et les transformations successives de ses premières pensées. Terminons cette énumération en citant encore le recueil des *Exercices d'Analyse*

et de Physique mathématique (1840-1847), destiné à faire suite aux anciens *Exercices de Mathématiques* (1826-1830), et le *Journal de M. Liouville*, dans lequel Cauchy a inséré plusieurs articles.

Dans la nomenclature des divers Mémoires, j'ai dû me borner, par les raisons exprimées précédemment, à donner simplement les titres avec l'indication des volumes et des pages où ils se trouvent; pour les Mémoires plus volumineux, j'ai ajouté en quelques mots l'énoncé des principales matières qui y sont traitées. Quant aux commentaires, ils sont réunis, sous le nom de *sommaire*, en tête de chaque section, dans une courte analyse qui peut être considérée comme un tableau concis, bien insuffisant sans doute, mais au moyen duquel on sera du moins en mesure de se former une première idée de la route parcourue par le savant. J'ai profité, à cet effet, des introductions et des réflexions générales qui accompagnent plusieurs des Mémoires de Cauchy; il m'a suffi le plus souvent d'analyser ces Notices et quelquefois de reproduire les propres paroles de l'auteur, afin de rendre plus fidèlement et plus complétement sa pensée.

A l'occasion des principales découvertes de Cauchy, j'ai indiqué quelques-unes des applications qui en ont été faites par ses disciples ou par des savants étrangers; j'ai indiqué également les Ouvrages, Mémoires ou Thèses qui pourraient être consultés utilement; toutefois, je l'ai fait avec une certaine réserve, afin de ne pas trop étendre les dimensions de ce volume, et aussi afin de ne pas m'écarter du but essentiel que je m'étais proposé. C'est

pour la même raison que, dans les sommaires, je me suis astreint à présenter exclusivement les idées mêmes de Cauchy sans les discuter; quelques-unes ont pu être contestées, ou bien ont dû subir plus tard des transformations; mais ce qui importait avant tout était de reproduire fidèlement le point de vue auquel il s'était placé.

Je me suis abstenu, autant que possible, d'appréciations personnelles; c'est en effet une tâche très-délicate que de porter un jugement absolu sur des travaux d'un ordre si élevé et sur un homme aussi éminent. Il ne faut pas oublier que, de son vivant, Cauchy n'a été compris que d'un petit nombre de savants; les autres, tout en admirant la profondeur de son génie, ne se sont pas toujours rendu suffisamment compte de la portée de ses découvertes et n'en ont pas toujours prévu les innombrables conséquences. Lorsque les circonstances exigeaient qu'un jugement fût porté, j'ai eu soin de ne le faire qu'après m'être entouré de tous les documents propres à m'éclairer, et après avoir pris, autant que possible, l'avis des hommes dont le nom fait autorité en ces matières.

Je prie, en particulier, MM. Hermite et Puiseux de vouloir bien accepter ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour les conseils et les soins bienveillants qui m'ont permis d'amener mon travail à une forme moins imparfaite, et de le présenter ainsi avec plus de confiance aux savants qui pourront le consulter.

C.-A. VALSON.

TABLEAU RÉSUMÉ

DES

TRAVAUX D'AUGUSTIN CAUCHY.

OUVRAGES.

Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique; 1 vol. in-8, 1821.

Résumé des leçons données à l'École royale Polytechnique sur le Calcul infinitésimal; 1 vol. in-4, 1823.

Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie; 2 vol. in-4, 1826 et 1828.

Leçons sur le Calcul différentiel; 1 vol. in-4, 1829.

* Anciens *Exercices de Mathématiques;* 51 livraisons in-4, 1826-1836.

Résumés analytiques; 5 livraisons in-4 ; Turin, 1833.

Nouveaux Exercices de Mathématiques (Traité sur la théorie de la dispersion de la lumière); 8 cahiers in-4 ; Prague, 1835-1836.

** Nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique;* 4 vol. in-4, 1840-1847.

MÉMOIRES.

Sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires, Rapports, Notes, etc., répartis comme il suit :

Mémoires détachés	18
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences	549
Mémoires de l'Institut	23
Mémoires des savants étrangers	3
Journal de l'École Polytechnique	14
Annales de Gergonne	4
Bulletin Férussac	15
Bulletin de la Société Philomathique	15
Journal de M. Liouville	7
MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE :	
* Anciens *Exercices de Mathématiques*	88
** Nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*	53
Total	789

Si l'on classe les mêmes Mémoires par ordre de matières, sans tenir compte de ceux qui font double emploi, comme se rapportant à la fois à plusieurs sujets distincts, on obtient le résultat suivant :

Arithmétique. — Théorie des nombres	69
Géométrie	39
Analyse	72
Intégrales définies. — Résidus	81
Fonctions symétriques. — Substitutions	40
Séries	73
Théorie des équations	48
Fonctions périodiques inverses	39
Équations différentielles	84
Mécanique	113
Optique	102
Astronomie	73

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS DIVERSES

EMPLOYÉES DANS LE COURS DU VOLUME.

Anc. Ex. : t. IV. — *Anciens* Exercices de Mathématiques, publiés de 1826 à 1830 (51 livraisons), tome quatrième.

Rés. Anal. — Résumés analytiques, publiés à Turin, 1833.

Nouv. Ex. — *Nouveaux* Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, publiés de 1840 à 1847.

Mém. Dét. — Mémoires détachés publiés à diverses époques.

C. R : 1841, 2e *sem.*, p. 564. — Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, année 1841, deuxième semestre, page 564 et suivantes.

Inst. — Mémoires de l'Institut, section de l'Académie des Sciences.

Sav. Étr. — Recueil des Mémoires des savants étrangers présentés à l'Académie des Sciences.

Éc. Pol. : cah. XIX. — Journal de l'École Polytechnique, cahier dix-neuvième.

Ann. Gerg. — Annales de Mathématiques pures et appliquées, publiées par Gergonne.

Bull. Fér. — Bulletin des Sciences, publié par Férussac.

Bull. Phil. — Bulletin de la Société Philomathique.

Journ. Liouv. — Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par M. Liouville.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SECOND.

Pages.

INTRODUCTION V

TABLEAU RÉSUMÉ DES TRAVAUX D'AUGUSTIN CAUCHY XVI

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS DIVERSES XVIII

CHAPITRE I. — ARITHMÉTIQUE ET THÉORIE DES NOMBRES.

Sommaire. — Origines de la théorie des nombres. — Diophante. — Théorèmes de Fermat. — Travaux de Gauss. — *Disquisitiones Arithmeticæ.* — Équations binômes. — Sommes alternées de leurs racines. — Travaux de Cauchy sur la théorie des nombres..... 1

Mémoires. — Arithmétique. — Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques. — Sur le recensement des votes. — Équations et équivalences binômes. — Formes quadratiques et facteurs radicaux. — Questions diverses..... 9

CHAPITRE II. — GÉOMÉTRIE.

Sommaire. — Recherches sur les polyèdres et la Géométrie pure. — Théorie des surfaces du second degré. — Géométrie infinitésimale. — Synthèse algébrique. — Applications de l'Analyse à la Géométrie..... 13

Mémoires. — Polygones et polyèdres. — Géométrie analytique. — Rectifications, quadratures, etc. — Questions diverses et Rapports. 16

CHAPITRE III. — ANALYSE.

Sommaire. — Principes de l'Analyse infinitésimale. — Leibnitz, Newton, Euler, Lagrange. — Théorie de Cauchy fondée sur la considération des limites et sur la notion de la continuité des fonctions. — Analyse des symboles imaginaires..... 20

Mémoires. — Ouvrages classiques sur l'Analyse. — Calcul différentiel et intégral. — Calcul des variations. — Théorie des imaginaires. — Ses applications. — Équivalences algébriques. — Quantités géométriques. — Interpolation. — Résultats moyens. — Méthode des moindres carrés. — Fonctions interpolaires; leur usage dans la théorie des fonctions symétriques. — Valeurs moyennes des fonctions. — Questions diverses. — Théorèmes d'Analyse et de Calcul intégral. — Fonctions et équations symboliques. — Fonctions discontinues. — Coefficients limitateurs. — Usage des régulateurs en Analyse. — Ouvrages à consulter..... 28

Pages.

CHAPITRE IV. — Intégrales définies et résidus.

Sommaire. — Analyse des premiers Mémoires de Cauchy sur les intégrales définies. — Intégrales doubles. — Intégrales singulières. — Intégrales extraordinaires. — Influence de l'ordre des intégrations. — Analyse du Mémoire sur les intégrales définies imaginaires. — Principes et notations du calcul des résidus..... 35

Mémoires. — Théorie des intégrales définies. — Sur les divers genres d'intégrales définies. — Détermination et réduction d'un grand nombre d'intégrales définies. — Intégrales eulériennes. — Relations entre les intégrales définies et la théorie des différences finies. — Calcul des résidus. — Applications diverses de ce calcul aux équations algébriques, aux séries, aux équations différentielles, aux questions de Physique mathématique, etc. — Différences finies..... 47

CHAPITRE V. — Fonctions symétriques et substitutions.

Sommaire. — Premières recherches de Cauchy, en 1813. — Détermination du nombre des valeurs des fonctions de plusieurs lettres. — Théorème de M. Bertrand. — Théorie des substitutions. — Ses applications à la théorie générale des équations algébriques. 55

Mémoires. — Fonctions symétriques et alternées. — Leur usage dans la résolution des équations. — Sur le nombre des valeurs des fonctions. — Fonctions intransitives, transitives et doublement transitives. — Théorie des résidus. — Propriétés des substitutions. — Substitutions conjuguées. — Applications diverses. — Clefs algébriques. — Ouvrages à consulter..... 59

CHAPITRE VI. — Séries.

Sommaire. — Défauts et lacunes des anciennes théories. — Leibnitz, Euler, Laplace. — Recherches de Cauchy. — Emploi des intégrales définies et des symboles imaginaires pour établir rigoureusement les règles relatives à la convergence des séries..... 63

Mémoires. — Développements en séries; règles de convergence. — Sur la convergence des séries et les limites des restes. — Application du calcul des résidus à la théorie des séries. — Étude des séries qui servent à représenter les racines des équations algébriques et les intégrales des équations différentielles. — Sur les divers modes de développement des fonctions en séries. — Méthode logarithmique. — Séries syntagmatiques. — Série de Lagrange. — Séries multiples, prolongées, divergentes. — Fac-

Pages.

torielles. — Application à la théorie des fonctions elliptiques. — Développement des fonctions en fractions rationnelles. — Questions diverses. — Progressions des divers ordres. — Théorèmes relatifs aux sommes d'exponentielles. — Auteurs et ouvrages à consulter..... 71

CHAPITRE VII. — ÉQUATIONS.

Sommaire. — Résumé des recherches antérieures sur la théorie des équations. — Énumération des équations qu'on sait résoudre. — Détermination du nombre et des limites des racines. — Théorème de Sturm. — Théorème de Cauchy..... 79

Mémoires. — Théorie des équations. — Sur la résolution des équations algébriques ou transcendantes. — Sur les racines réelles ou imaginaires des équations. — Sur la nature des racines de certaines équations transcendantes. — Méthodes diverses pour la résolution des équations, fondées sur la théorie des intégrales définies, sur celle des quantités géométriques, sur les propriétés des modules des fonctions, etc. — Calcul des indices des fonctions. — Développement des racines des équations en séries convergentes. — Application du calcul des résidus à la théorie des équations. — Équations simultanées. — Élimination. — Résolution numérique de ces équations par la méthode d'interpolation. — Théorie de l'élimination. — Questions diverses. — Ouvrages à consulter... 88

CHAPITRE VIII. — FONCTIONS INVERSES ET PÉRIODIQUES.

Sommaire. — Réflexions générales sur les difficultés que présente la détermination des fonctions inverses. — Nécessité de recourir à la considération des symboles imaginaires. — Mémoire de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. — Série de nouveaux Mémoires en 1846. — Classification des fonctions. — Fonctions monodromes, monogènes, synectiques. — Théorie des fonctions elliptiques. — Recherches de MM. Hermite, Puiseux, Briot et Bouquet..... 93

Mémoires. — Théorie générale des fonctions. — Sur les intégrales prises suivant différentes courbes et suivant des contours fermés. — Sur les intégrales imaginaires des équations différentielles. — Sur l'inversion des intégrales. — Sur les diverses espèces d'intégrales des équations différentielles. — Application du calcul des résidus à la théorie des fonctions périodiques inverses. — Sur les compteurs logarithmiques et sur les régulateurs. — Ouvrages à consulter..... 100

Pages.

CHAPITRE IX. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Sommaire. — Usage des séries dans la théorie des équations différentielles. — Théorèmes fondamentaux sur l'existence des intégrales pour tout système d'équations différentielles. — Résumé des recherches de Cauchy sur cette théorie..... 104

Mémoires. — Théorie générale des équations différentielles. — Sur les diverses méthodes dont on peut faire usage pour l'intégration des équations différentielles. — Fonctions génératrices de Laplace. — Formules de Fourier. — Application du calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles. — Convergence des séries qui représentent les intégrales. — Équations différentielles linéaires. — Équations linéaires à coefficients constants ou variables, avec ou sans second membre. — Équations aux dérivées partielles. — Équations différentielles simultanées. — Fonction principale. — Équation caractéristique. — Propriétés et transformations diverses de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène..... 111

CHAPITRE X. — MÉCANIQUE.

Sommaire. — Considérations générales sur la constitution intime des corps. — Réduction des forces de la nature à l'unité. — Élasticité. — Rôle de l'éther. — Équations générales des mouvements moléculaires. — Travaux de Navier, Poisson, Cauchy. — Réduction des équations à la forme linéaire. — Intégration de ces équations. — Mouvements infiniment petits. — Mouvements simples. — Mouvements par ondes planes. — Conditions relatives aux limites des corps. — Application à divers problèmes de Mécanique. 118

Mémoires. — Principes généraux de la Mécanique. — Corps solides. — Moments d'inertie. — Forces vives. — Choc des corps. — Tiges et plaques élastiques. — Équilibre et mouvement des systèmes. — Sur les systèmes simples ou doubles de points matériels qui s'attirent ou se repoussent à de petites distances. — Pressions, tensions, condensations, dilatations. — Sur les pressions, les tensions, les condensations et les dilatations qui se produisent dans les systèmes de molécules. — Conditions relatives aux limites des corps. — Application à la recherche des équations de condition relatives aux surfaces de séparation des milieux. — Questions diverses. — Rapports. — Ouvrages à consulter : *Leçons de Mécanique analytique*, d'après les méthodes de Cauchy, par M. l'Abbé Moigno, 1868 ; *Sept Leçons de Physique générale*, par Cauchy, publiées par M. l'Abbé Moigno, 1868..... 129

Pages

CHAPITRE XI. — OPTIQUE.

Sommaire. — Travaux de Fresnel et de Cauchy. — Équations générales des mouvements lumineux. — Propagation de la lumière dans les milieux isophanes et dans les cristaux. — Polarisation, réflexion, réfraction, dispersion, diffraction de la lumière. — Sur la non-dispersion de la lumière dans les espaces célestes. — Conséquences pour la constitution de l'éther..... 139

Mémoires. — Principes généraux de l'optique. — Propagation des ondes. — Équations générales. — Réduction de la chaleur et de la lumière à une même théorie. — Propagation des ondes dans les milieux isophanes et dans les milieux cristallisés. — Délimitation des ondes. — Réflexion et réfraction de la lumière. — Explication mathématique de la réflexion et de la réfraction de la lumière. — Sur les trois espèces de rayons lumineux qui correspondent aux mouvements simples du fluide éthéré. — Rayons évanescents. — Mesure de la quantité de lumière réfléchie par les métaux. — Expériences de M. Jamin. — Lames minces. — Anneaux colorés. — Polarisation. — Divers modes de polarisation. — Dispersion. — Théorie mathématique de la dispersion. — Expériences de Frauenhofer. — Diffraction. — Diffraction de la lumière et du son. — Analogies et différences. — Ouvrages à consulter..... 152

CHAPITRE XII. — MÉCANIQUE CÉLESTE.

Sommaire. — Insuffisance des méthodes anciennement usitées pour l'analyse des mouvements planétaires. — Recherches de Cauchy fondées sur le calcul des résidus. — Méthodes nouvelles pour le développement en série des fonctions astronomiques. — Propriétés et réduction des calculs relatifs à la fonction perturbatrice. — Extension au cas des petites planètes. — Mémoire de M. Le Verrier sur la planète Pallas. — Travaux astronomiques de Cauchy à cette occasion..... 160

Mémoires. — Mécanique céleste. — Sur les applications du calcul des résidus et des limites à la Mécanique céleste. — Sur les équations différentielles des mouvements planétaires, et sur la détermination de ces mouvements. — Calcul des inégalités des mouvements planétaires. — Application à ces calculs de la méthode logarithmique. — Rapport et Notes concernant le travail de M. Le Verrier sur la planète Pallas. — Méthodes nouvelles et variées pour la détermination des orbites des planètes et des comètes. — Calcul des éléments des orbites et approximations successives. — Ouvrages à consulter..... 171

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

LES TRAVAUX

DU

BARON AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES NOMBRES.

SOMMAIRE. — Origines de la théorie des nombres. — Diophante. — Théorèmes de Fermat. — Travaux de Gauss. — *Disquisitiones Arithmeticæ*. — Équations binômes. — Sommes alternées de leurs racines. — Travaux de Cauchy sur la théorie des nombres.

MÉMOIRES. — *Arithmétique*. — Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques. — Sur le recensement des votes. — *Équations et équivalences binômes*. — *Formes quadratiques et facteurs radicaux*. — *Questions diverses*.

SOMMAIRE.

Les premières recherches relatives à la théorie des nombres eurent pour objet des problèmes d'analyse indéterminée, dans lesquels on se proposait de satisfaire, par le moyen de nombres entiers, à certaines équations renfermant plusieurs inconnues. Les questions de ce genre étaient déjà familières aux anciens, et Diophante d'Alexandrie avait fait preuve, à cet égard, d'une rare sagacité. Mais l'analyse indéterminée n'est qu'un des objets particuliers de la théorie des nombres, ou plutôt n'a été que l'occasion de cette théorie, en faisant découvrir acci-

dentellement diverses propriétés, qui, après avoir été successivement développées, ont conduit à des résultats d'une généralité inattendue. Fermat, dans ses commentaires sur Diophante, en a signalé plusieurs qui sont fort remarquables, mais il n'a pas laissé de démonstrations, et les erreurs dans lesquelles il est tombé font supposer que, dans certains cas du moins, ces démonstrations lui manquaient en effet. Les théorèmes de Fermat jouissent d'une grande célébrité, tant à cause de leur importance, qu'en raison de leur difficulté.

Le plus simple de ces théorèmes s'énonce ainsi : « Soit p un nombre premier et a un autre nombre non divisible par p; la quantité $a^{p-1} - 1$ sera toujours divisible par p. » Il a été démontré par divers géomètres, notamment par Euler, qui l'a en outre généralisé en faisant voir que : « Si a et p sont premiers entre eux, et si l'on désigne par $\varphi(p)$ la totalité des nombres premiers inférieurs à p, la quantité $a^{\varphi(p)} - 1$ sera toujours divisible par p. »

Dans une lettre à Pascal, Fermat énonce encore le résultat suivant : « L'expression $2^{2^m} + 1$ ne renferme que des nombres premiers; » ce qui est inexact, comme Euler l'a montré : pour $m = 5$, l'expression est divisible par le nombre 641.

Fermat s'était aussi occupé des nombres figurés et des nombres polygones. Ces derniers sont représentés par la formule $n + \frac{n(n-1)}{1.2} b$; si l'on fait successivement $b = 1$, 2, 3, 4,..., on a les nombres triangulaires, carrés, pentagones, hexagones, etc., ainsi nommés parce qu'on peut les représenter géométriquement au moyen des figures correspondantes. Ils jouissent de plusieurs propriétés remarquables, qui ont été données par Fermat, mais toujours sans démonstration; à la suite de l'un de ses énoncés, il

se contente d'ajouter cette phrase : « nec existimo pulchrius aut generalius in numeris posse dari theorema, cujus demonstrationem margini inserere nec curat, nec vacat. » Parmi ces théorèmes nous remarquerons surtout le suivant : « Tout nombre est triangulaire ou composé de 2, 3 triangulaires; carré ou composé de 2, 3, 4 carrés; pentagone ou composé de 2, 3, 4, 5 pentagones et ainsi de suite. » Ce théorème a été démontré pour la première fois par Cauchy dans un beau Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1813; il l'a de plus complété en lui donnant une forme plus précise et en faisant voir généralement que : « Tout nombre peut être décomposé en m nombres polygones de m côtés, qui, à l'exception de quatre, sont zéro ou l'unité. »

Le dernier théorème de Fermat a pour objet la résolution en nombres entiers de l'équation :

$$x^m + y^m = z^m.$$

Fermat affirme que le problème est impossible pour tout exposant autre que 2. Euler a montré en effet l'impossibilité pour $m = 3$, Legendre pour $m = 5$, M. Lejeune-Dirichlet pour $m = 14$, M. Lamé pour le cas de $m = 7$, qui comprend le précédent; enfin plus récemment M. Kummer, dépassant de beaucoup ces résultats, a prouvé l'impossibilité de l'équation pour une infinité de nombres premiers, et notamment pour tous ceux qui n'excèdent pas 100; mais la démonstration dans le cas général reste encore à trouver.

Parmi les savants qui ont le plus avancé la théorie des nombres après Fermat, il faut citer Euler, Lagrange, Legendre, et surtout l'illustre Gauss, qui a conquis dans cette étude difficile un de ses plus beaux titres de gloire. Il fut conduit, comme il le rapporte lui-même, à s'occuper

de cette matière, par la découverte accidentelle de quelques propriétés qui lui parurent ouvrir la voie à d'autres propriétés plus générales. Après cinq ans de recherches approfondies, il publia, en 1801, son livre célèbre des *Disquisitiones Arithmeticæ*. Les premiers chapitres ont pour objet la théorie des congruences du premier et du second degré et les propriétés des résidus des puissances; viennent ensuite les formes et les équations indéterminées du second degré avec leurs diverses applications. Mais la partie de l'ouvrage qui, sans être la plus importante, a d'abord le plus vivement frappé l'attention des géomètres, est celle qui traite de la résolution des équations binômes et des singulières propriétés de leurs racines. Ces équations avaient déjà occupé plusieurs savants, et l'on savait les résoudre jusqu'à celle du onzième degré que Vandermonde avait analysée par des procédés particuliers. Gauss traita la question dans toute sa généralité et en déduisit une foule de propriétés utiles concernant la théorie des nombres. L'une de ses idées les plus ingénieuses consiste à ranger les diverses racines de l'unité qui se reproduisent par leurs puissances, non pas suivant l'ordre successif des puissances, qui pouvait sembler au premier abord le plus naturel, mais dans un ordre tel que chacune d'elles soit toujours une même puissance de celle qui précède; et cette disposition met facilement en évidence diverses propriétés caractéristiques, auparavant cachées.

L'une des applications les plus intéressantes de la théorie des équations binômes concerne la division du cercle en parties égales au moyen de la règle et du compas. Les anciens savaient inscrire les polygones de trois et de cinq côtés : les procédés élémentaires de la géométrie suffisent pour cet objet; mais, pour généraliser la solution, il faut recourir à certaines propriétés très-délicates des nombres.

Aujourd'hui on sait résoudre le problème pour une infinité de polygones; il suffit que le nombre des côtés soit un nombre premier et soit en outre égal à une puissance de 2 augmentée d'une unité; les moindres nombres qui satisfont à cette double condition sont : 3, 5, 17, et 257.

Cauchy s'occupa à diverses reprises de la théorie des équations binômes. Son attention se porta surtout sur l'analyse des fonctions symétriques et des sommes alternées qu'on peut former avec leurs racines; il fut ainsi conduit à donner une extension notable aux travaux de Gauss, et découvrit en même temps plusieurs propriétés nouvelles dont il enrichit la théorie des nombres. Citons en particulier la question difficile qui a pour objet de déterminer complétement les sommes alternées des racines primitives d'une équation binôme, ou, ce qui revient au même, les sommes des puissances qui ont pour exposants les carrés des nombres inférieurs au module donné. Dans ses *Disquisitiones*, Gauss avait reconnu que, si le module est un nombre premier impair, le carré de la somme cherchée se réduira, au signe près, au module, et sera positif ou négatif suivant que le module, divisé par 4, donnera 1 ou 3 pour reste; mais, quand on revient du carré à la somme elle-même, on a un signe à déterminer, ce qui présente de grandes difficultés. Gauss avait résolu cette partie de la question dans son Mémoire intitulé : *Summatio serierum quarumdam singularium*; et M. Dirichlet en avait trouvé, de son côté, une autre solution, en s'appuyant sur des considérations empruntées à la théorie des intégrales définies. La méthode de Cauchy offre l'avantage de résoudre la question sans employer les séries de Gauss, qui donnent lieu à une démonstration compliquée, et sans recourir au calcul intégral ; elle repose simplement sur une formule donnée par Cauchy

en 1817, dans le *Bulletin de la Société Philomathique*, et qui a pour objet la transformation d'une somme d'exponentielles dont les exposants croissent comme les carrés des nombres naturels. Cette méthode est extrêmement remarquable; elle offre peut-être le plus étonnant exemple de la puissance de transformation analytique de son auteur, et il est aussi fort remarquable qu'elle ait un point de départ dans une relation essentiellement propre à la théorie des fonctions elliptiques, que l'illustre géomètre avait obtenue (ainsi que Poisson par une autre voie) bien longtemps avant les travaux d'Abel et de Jacobi. Du reste la méthode de Gauss repose elle-même sur des transformations de séries qui ressortent également de la théorie des fonctions elliptiques. La méthode de Cauchy peut encore être généralisée et étendue à d'autres déterminations analogues. Ainsi, par exemple, supposons que, le module p étant un multiple de 3 avec 1 pour reste, on élève une racine primitive aux diverses puissances qui ont pour exposants les résidus cubiques; la somme de ces puissances, quand on y remplacera la racine primitive donnée, par d'autres, pourra successivement acquérir trois valeurs distinctes qui seront les trois racines d'une équation connue, à laquelle on parvient à l'aide de la théorie de Gauss. Parmi les fonctions alternées qu'on peut former avec ces trois valeurs, la plus simple est le produit des trois différences que l'on obtient en les retranchant l'une de l'autre. La détermination complète de cette fonction est un problème analogue au précédent, mais d'un ordre plus élevé, attendu que les résidus quadratiques sont alors remplacés par des résidus cubiques.

On trouve encore dans les Mémoires de Cauchy des recherches importantes concernant les formes quadratiques. Fermat avait déjà annoncé, mais sans démons-

tration, qu'il possédait une méthode pour décomposer directement en deux carrés un nombre premier de la forme $4n+1$. Dans son Mémoire sur les résidus quadratiques, en 1825, Gauss donna une règle au moyen de laquelle on peut obtenir la racine de l'un des deux carrés dans lesquels se décompose un nombre premier de cette forme. Il suffit pour cela de chercher le plus petit reste qu'on obtient en divisant par n la moitié du coefficient du terme moyen dans le développement de la puissance $2n$ du binôme. Jacobi retrouva ensuite la règle de Gauss au moyen d'une théorie très-générale qui conduisait à d'autres résultats du même genre. Ainsi, par exemple, il a démontré que le nombre premier p, ou son quadruple $4p$, peut se réduire à la forme quadratique x^2+7y^2 quand $p-1$ est divisible par 7, ou à la forme x^2+27y^2 quand $p-1$ est divisible par 3. Parmi les divers résultats auxquels Cauchy est parvenu de son côté, on remarquera surtout le suivant : Si n est un nombre premier de la forme $4x+3$, et p un nombre premier de la forme $nx+1$, on peut résoudre directement en nombres entiers les équations :

$$x^2+ny^2=p^m,$$
$$x^2+ny^2=4p^m,$$

m ayant une valeur qui se déduit simplement des nombres de Bernoulli : ce sera le double du plus petit nombre entier équivalent, abstraction faite du signe, et suivant le module n, à celui des nombres de Bernoulli dont le rang est représenté par le quart de $n+1$. Plus tard, il généralisa ainsi ce résultat : Supposons que n, représentant toujours un diviseur impair de $p-1$, soit encore de la forme $4x+3$, mais cesse d'être un nombre premier ; soit d'ailleurs h l'un quelconque des nombres

entiers, premiers à n et inférieurs à $\frac{n}{2}$. Lorsqu'on prendra successivement pour modules les divers facteurs premiers de n, qu'on supposera inégaux entre eux, h pourra devenir plusieurs fois un non-résidu quadratique, et ce nombre de fois pourra être pair ou impair. Cela posé, on comptera les valeurs de h qui se trouvent dans l'un des cas, et l'on retranchera du nombre de ces valeurs le nombre de celles qui se trouvent dans l'autre. Le quadruple de la puissance de p qui aura pour exposant, ou la différence obtenue, si n est de la forme $8x + 7$, ou le tiers de cette différence dans le cas contraire, pourra toujours être converti en un binôme de la forme $x^2 + ny^2$. Cauchy rencontrait ainsi pour la première fois la fonction numérique par laquelle M. Dirichlet réussissait plus tard à représenter le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-n$. Des théorèmes analogues sont relatifs au cas où le nombre n serait pair, ainsi qu'au cas où, le nombre n étant impair, serait de la forme $4x + 1$, pourvu que, dans ce dernier cas, le nombre $p - 1$ soit divisible par 4.

Citons encore une méthode au moyen de laquelle on détermine directement l'exposant d'une puissance d'un nombre premier p, représentée par un binôme de la forme $\omega x^2 + \nu y^2$, ou $\nu x^2 + \nu\omega y^2$, ou par le quart de ce binôme, ω et ν étant deux diviseurs premiers impairs de $p - 1$, dont l'un est de la forme $4x + 1$, et l'autre de la forme $4x + 3$.

MÉMOIRES.

ARITHMÉTIQUE.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 789, 826. — *Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques.* — Pour vérifier une opération, il ne suffit pas de la recommencer dans le même sens, ni même dans un sens inverse ; il faut que les opérations de vérification soient complétement distinctes des premières. Cette condition se trouve remplie dans les formules d'interpolation données par Cauchy en 1835, et appliquées par lui au calcul des expériences de Frauenhofer sur la dispersion de la lumière.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 847. — *Sur les moyens de vérifier ou de simplifier diverses opérations de l'arithmétique décimale.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 952. — *Rapport sur les procédés de calcul imaginés et mis en pratique par un jeune pâtre de la Touraine, Henri Mondeux*— Un berger sicilien, Mangiamele, avait déjà offert un phénomène du même genre, beaucoup plus extraordinaire en lui-même que ce qu'on rapporte de la jeunesse de Pascal. Toutefois Mondeux, malgré les soins pris pour son éducation, ne put s'élever aux régions supérieures de la science; son aptitude était limitée aux combinaisons des calculs numériques.

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 242, 941. — *Rapport sur un Mémoire de M. Thoyer, relatif à une méthode abrégée de la multiplication.*

C. R : 1843, 2e *sem.*, p. 1270. — *Rapport sur les méthodes qui ont servi au développement des facultés intellectuelles d'un jeune sourd-muet.*

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 84. — *Rapport sur divers Mémoires de M. Houry, intitulés : Expériences sur les nombres.*

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 67. — *Rapport sur un Mémoire de M. le capitaine Guy, relatif à une erreur commise par les auteurs des Traités d'Arithmétique.*

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 1629. — *Rapport sur la singulière aptitude d'un enfant de six ans et demi pour le calcul.*

C. R. : 1848, 1er *sem.* — *Six communications relatives à l'opération de dépouillement des votes, à l'occasion des élections législatives.*

ÉQUATIONS BINÔMES. — ÉQUIVALENCES BINÔMES.

Journ. Liouv. : t. V, p. 154. - **C. R.** : 1840, 1er *sem.*, p. 560. — *Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées formées avec les racines primitives des équations binômes.*

Journ. Liouv. : t. V, p. 169. - **C. R.** : 1840, 1er *sem.*, p. 594. — *Sur la sommation de certaines puissances d'une racine primitive d'une équation binôme, et, en particulier, des puissances qui offrent pour exposants les résidus cubiques inférieurs au module donné.* — Dans ce Mémoire, qui fait suite au précédent, Cauchy applique sa nouvelle méthode à un problème plus général que celui qu'il avait d'abord considéré.

Inst. : t. XVII, 1840, p. 249. — Un *Mémoire* de 520 pages *sur la Théorie des Nombres.* — L'auteur développe les principes établis antérieurement par lui dans les *Anciens Exercices*, et notamment dans le *Bulletin de Férussac* pour 1829 (1). Il établit d'abord les propriétés des fonctions Θ auxquelles conduit la résolution des équations binômes, et il analyse les conséquences nombreuses qui s'en déduisent. Le Mémoire est suivi de quatorze Notes dans lesquelles sont traités divers sujets :

Sur les résidus quadratiques, cubiques et biquadratiques;

Sur la somme des racines primitives d'une équation binôme, et sur les fonctions symétriques de ces racines;

Sur les sommes et les fonctions alternées de ces mêmes racines;

Sur les fonctions réciproques et sur les moyens qu'elles fournissent d'évaluer les sommes alternées des racines primitives des équations binômes;

Observations relatives aux formes quadratiques sous lesquelles se présentent certaines puissances des nombres premiers, et réduction des exposants de ces puissances.

Anc. Ex. : t. IV, p. 253. — *Sur la résolution des équivalences dont les modules se réduisent à des nombres premiers.*

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 37. — *Sur les racines des équivalences correspondantes à des modules quelconques, premiers ou non premiers, et sur les avantages que présente l'emploi de ces racines dans la théorie des nombres, surtout en fournissant le moyen d'établir la théorie nouvelle des indices modulaires des polynômes radicaux.*

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 93. — *Sur les indices modulaires des polynômes radicaux que fournissent les puissances et produits des racines de la résolvante d'une équation binôme.*

---

(1) Voir : *Questions diverses*, p. 12.

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 285. — *Sur l'emploi des racines de l'unité pour la résolution des divers systèmes d'équations linéaires.*

FORMES QUADRATIQUES. — FACTEURS RADICAUX.

Anc. Ex. : t. I, p. 265 (32 pages). — *Démonstration du théorème de Fermat sur les nombres polygones.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 359. - **Journ. Liouv.** : t. V, p. 211. — *Rapport sur un Mémoire de M. Lamé, relatif au dernier théorème de Fermat.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 473, 519. — *Sur la théorie des nombres, et en particulier sur les formes quadratiques des nombres premiers. — Sur les formes quadratiques des puissances d'un nombre premier, ou du quadruple de ces puissances.* — Consulter sur ce sujet un Mémoire important de Gauss, relatif aux résidus biquadratiques, publié en 1825, et un Mémoire de Jacobi, *Journal de Crelle*, 1827.

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 51, 85, 181, 229. — *Sur les formes quadratiques des nombres premiers et de leurs puissances. — Discussion des formes quadratiques sous lesquelles se présentent certaines puissances des nombres premiers. — Réduction des exposants de ces puissances.*

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 437. — *Théorèmes divers sur les résidus et les non-résidus quadratiques.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 501. — *Rapport sur une Note de M. D'Adhémar, relative à la théorie des nombres.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 347. — *Note sur quelques propriétés des facteurs complexes.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 469, 516, 578, 633, 661. — *Sur de nouvelles formules relatives à la théorie des polynômes radicaux, et sur le dernier théorème de Fermat.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 885. — *Sur les lieux analytiques.* — La théorie des points et des lieux analytiques fournit le moyen d'éclaircir un grand nombre de questions délicates, et spécialement celles qui se rapportent à la théorie des polynômes radicaux.

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 943. — *Sur la décomposition d'un polynôme radical, à coefficients réels, en deux parties, dont la première est un polynôme radical à coefficients entiers, et dont la seconde offre un module plus petit que l'unité.*

C. R., 1847 : 1er *sem.*, p. 1022 ; 2e *sem.*, p. 46. — *Sur la décomposition d'un nombre entier en facteurs radicaux.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 1117. — *Sur les facteurs modulaires des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables.*

C. R. : 1857, 1er *sem.*, p. 361, 416. — *Sur les fonctions quadratiques et homogènes de plusieurs variables.*

QUESTIONS DIVERSES.

Bull. Fér. : 1829, t. XII, p. 205; 1831, t. XV, p. 136. — *Mémoires sur la théorie des nombres.*

Éc. Pol. : cah. XVI, p. 99 (24 pages). — *Recherches sur les nombres.* — On remarquera divers théorèmes relatifs aux fonctions algébriques et entières dont les coefficients sont des nombres entiers.

Bull. Phil. : 1816, p. 133. - **Anc. Ex.** : t. I, p. 114. — *Démonstration d'un théorème curieux sur les nombres.*

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 698, 813 (48 pages). — *Sur l'algèbre et la théorie des nombres.* — Relations qui existent entre les coefficients d'une équation algébrique et les sommes des puissances semblables de ses racines. — Formules singulières déduites de ces mêmes relations. — Sur la résolution des équations indéterminées du premier degré en nombres entiers.

Anc. Ex. : t. IV, p. 217 (35 pages). - **Nouv. Ex.** : t. II, p. 137; t. III, p. 145. - **C. R.**, 1847 : 1er *sem.*, p. 996; 2e *sem.*, p. 132, 177, 242. — *Sur diverses propositions relatives à l'algèbre et à la théorie des nombres.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 1 (40 pages). — *Sur la résolution des équations indéterminées du premier degré en nombres entiers.* — *Table pour la détermination de l'indicateur maximum correspondant à un module donné.*

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 719. — *Sur quelques séries dignes de remarque qui se présentent dans la théorie des nombres.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 551. — *Remarques à l'occasion d'une communication de M. Breton (de Champ), concernant la théorie des nombres.*

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 443. — *Rapport sur un Mémoire de M. Gorini, relatif aux résidus des puissances d'un même nombre.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 610. — *Rapport sur un Mémoire de M. Koraleck, relatif aux logarithmes des nombres.*

C. R. : 1857, 1er *sem.*, p. 77. — *Recherches nouvelles sur la théorie des nombres.*

CHAPITRE II.

GÉOMÉTRIE.

SOMMAIRE. — Recherches sur les polyèdres et la Géométrie pure. — Théorie des surfaces du second degré. — Géométrie infinitésimale. — Synthèse algébrique. — Applications de l'Analyse à la Géométrie.

MÉMOIRES. — *Polygones et polyèdres. — Géométrie analytique. — Rectifications, quadratures, etc. — Questions diverses et Rapports.*

SOMMAIRE.

Les premières recherches géométriques de Cauchy se rapportent à la théorie des polyèdres. Dans ses Mémoires de 1811, il s'était proposé d'établir d'une manière complète les conditions d'égalité et de similitude des polyèdres, question difficile qui avait arrêté, avant lui, des savants éminents. Il avait été ainsi conduit à plusieurs théorèmes importants, parmi lesquels on remarque celui qui est la généralisation du théorème d'Euler sur le nombre des sommets, des faces et des arêtes. Plus tard, il compléta cette étude, en démontrant plusieurs autres propriétés utiles des polyèdres, notamment celles qui concernent leurs projections sur des plans.

En Géométrie Analytique, on trouvera d'abord une nouvelle méthode pour la discussion des lignes et des surfaces du second ordre ; puis une analyse détaillée des formules qui servent pour le changement des axes de coordonnées et des variables. En Géométrie Infinitésimale, on remarquera un ensemble de recherches intéressantes

sur les contacts des courbes et sur la théorie des rectifications et des quadratures.

Chargé par l'Académie d'examiner un travail considérable de M. Amyot sur les surfaces du second ordre, Cauchy avait été amené à réfléchir plus particulièrement sur les méthodes au moyen desquelles on peut appliquer l'Analyse à la Géométrie. Le résultat de ses recherches se trouve exposé dans une série de notes placées à la suite du Rapport académique ; elles furent en outre l'occasion d'un Mémoire sur la Synthèse algébrique, publié vers la même époque. L'Analyse appliquée à la Géométrie a, comme on sait, pour objet de représenter par des équations les figures sur lesquelles on raisonne et de ramener ainsi à des transformations algébriques la solution des problèmes de Géométrie ; mais si cette méthode a l'avantage de conduire à des procédés plus uniformes, elle a, d'un autre côté, l'inconvénient de compliquer souvent les questions et de donner des solutions moins simples que celles de la méthode synthétique. Toutefois, en associant les deux méthodes, on peut, dans beaucoup de cas, arriver à des solutions aussi élégantes que par la Géométrie pure : tel est l'objet de la Synthèse algébrique. La plupart des problèmes de Géométrie plane, par exemple, se ramènent à la détermination d'un ou de plusieurs points définis par des intersections de droites ou de cercles. Cela posé, on commencera par mettre le problème en équation ; mais au lieu de résoudre directement les équations et de construire géométriquement leurs racines, on les combinera de manière à obtenir des équations nouvelles représentant des lieux géométriques simples, dont la construction suffise à la détermination des points cherchés. Ces lieux devront être, autant que possible, des droites ou des cercles, et on les obtiendra le plus souvent

en combinant les équations par voie d'addition ou de soustraction. D'ailleurs, les équations à deux ou trois variables sont susceptibles de diverses interprétations géométriques, ce qui donne des théorèmes utiles dans les applications: on en voit des exemples nombreux dans le Mémoire dont il s'agit.

Quoique la plupart de ses travaux eussent rapport à l'Analyse pure, cependant Cauchy profitait habilement des ressources de la Géométrie. Toutes les fois que les résultats d'une théorie étaient susceptibles d'une interprétation géométrique simple, il ne manquait pas de la donner ; il en est résulté une foule de propositions qui sont éparses dans ses Mémoires et qu'il serait intéressant de trouver réunies. Je me bornerai à citer la suivante, relative aux polyèdres: « Dans un polyèdre ouvert par sa partie supérieure, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse d'une unité le nombre des arêtes. » Elle est tirée d'un Mémoire qui pourra sembler, au premier abord, bien étranger à la question, car il s'agit de la discussion des éléments déterminés par un grand nombre d'observations, et de la méthode à suivre pour que la plus grande des erreurs devienne un minimum. (*Voir* Éc. Pol., cah. XX, p. 185.)

Ajoutons enfin que les beaux travaux de Cauchy sur la théorie des fonctions imaginaires et sur celle des fonctions inverses et doublement périodiques montrent avec quelle rare sagacité il savait se servir à la fois de l'Analyse et de la Géométrie.

MÉMOIRES.

POLYGONES ET POLYÈDRES.

Éc. Pol. : cah. XVI, p. 68 (30 pages). - LEGENDRE, *Géométrie*, p. 323. — *Mémoire sur les polygones et les polyèdres.* — Théorèmes sur les polygones convexes, rectilignes ou sphériques. — Théorèmes sur les angles solides et les polyèdres convexes. — Généralisation des théorèmes d'Euler. — Conditions d'égalité ou de similitude des polyèdres. — Legendre, dans les dernières éditions de sa *Géométrie*, a donné une analyse de ces recherches.

Anc. Ex. : t. II, p. 38. — *Sur quelques propriétés des polyèdres.* — Théorèmes généraux sur les projections des côtés d'un polygone, ou des faces d'un polyèdre.

Rés. Anal. : p. 133. — *Relations qui existent entre le périmètre d'un polygone et la somme des projections des éléments de ce périmètre sur diverses droites.*

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 489. — *Sur quelques théorèmes de Géométrie Analytique relatifs aux polygones et aux polyèdres réguliers.*

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 517. — *Sur quelques propriétés remarquables des polyèdres réguliers.* — On y trouve en particulier ce théorème :

« Les sommets de l'hexaèdre ou du dodécaèdre régulier sont en même temps les sommets de deux ou de cinq tétraèdres réguliers. »

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Anc. Ex. : t. III, p. 1 (22 pages). — *Sur les centres, les plans principaux et les axes des surfaces du second ordre.*

Anc. Ex. : t. III, p. 25 (40 pages). — *Des surfaces que peuvent engendrer, en se mouvant dans l'espace, des lignes droites ou courbes, de forme constante ou variable.*

Anc. Ex. : t. III, p. 65 (56 pages). — *Discussion des lignes et des surfaces du second degré.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 16. — *Sur les sommes formées par l'addition de fonctions semblables des coordonnées de divers points.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 26; t. II, p. 273. — *Sur la transformation des coordonnées rectangulaires.*

Nouv. Ex. : t. III, p. 131. — *Sur le mouvement de rotation variable d'un point qui représente, dans un plan donné, la projection d'un autre point doué, dans l'espace, d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un certain axe.*

Nouv. Ex. : t. III, p. 137. — *Note sur un théorème de géométrie analytique.*

Nouv. Ex. : t. III, p. 253. — *Sur les lignes qui divisent en parties égales les angles formés par deux droites, et sur la rotation d'une droite mobile dans l'espace.*

Les principes exposés dans ce Mémoire servent à établir les propriétés de divers systèmes de courbes tracées sur une surface.

Nouv. Ex. : t. III, p. 274 (31 pages). — *Sur les propriétés des résultantes à deux termes.* — Formules analytiques relatives à ces résultantes. — Interprétation géométrique de plusieurs des formules obtenues.

Nouv. Ex. : t. III, p. 305 (56 pages).— *Sur la théorie des projections orthogonales.* — Application à la trigonométrie sphérique.

Nouv. Ex. : t. IV, p. 1 (86 pages). — *Sur les résultantes que l'on peut former, soit avec les cosinus des angles compris entre deux systèmes d'axes, soit avec les coordonnées de deux ou de trois points.* — Des mouvements de rotation directs ou rétrogrades. — Détermination des résultantes. — Des conditions sous lesquelles ces résultantes s'évanouissent. — Relations qui existent entre les coefficients des variables dans les deux systèmes d'équations, à l'aide desquelles on passe d'un premier système de coordonnées rectangulaires à un second, et réciproquement.

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 867, 967, 1039, 1844, 1er *sem.*, p. 803. — *Sur la synthèse algébrique.* — Règles générales pour appliquer l'analyse à la solution des problèmes de géométrie pure. — Application à divers problèmes, notamment à la détermination du cercle tangent à trois cercles et de la sphère tangente à quatre sphères données.

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 783, 798, 885 (52 pages). — *Rapport sur un Mémoire de M. Amyot relatif aux surfaces du second ordre.*

— Ce Rapport est suivi de sept Notes ayant pour objet d'étendre et de généraliser les nouveaux théorèmes. Elles portent sur les objets suivants :

Sur l'expression des distances d'un point mobile à un centre fixe et à

un plan fixe. — Sur les plans tangents, les plans polaires, les plans diamétraux et les centres des surfaces du second ordre. — Sur diverses propriétés des lignes et des surfaces du second ordre. — Sur les courbes tracées dans le plan d'une section conique par des foyers et des pôles correspondants. — Sur les courbes qui renferment les foyers et les pôles correspondants d'une surface du second ordre. — Sur un théorème d'analyse et sur diverses conséquences de ce théorème.

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 305. — *Sur divers théorèmes de géométrie analytique, concernant la théorie des projections et les principes de la trigonométrie.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 273; 1846, 2e *sem.*, p. 251. — *Enoncé de deux Mémoires concernant les propriétés de divers systèmes de droites.*

RECTIFICATIONS, QUADRATURES, ETC.

Anc. Ex. : t. I, p. 140, 177 (25 pages). — *Sur un théorème relatif au contact des courbes, et sur les divers ordres de contact des lignes et des surfaces.*

Inst. : t. XXII, p. 3. — *Sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes.*

Ce Mémoire est un complément du Mémoire de 1831 sur le calcul des limites; la fixation des limites dépend de certains théorèmes, relatifs à la rectification ou à la quadrature des courbes, ou des surfaces, qui peuvent avoir, du reste, des applications utiles en géométrie.

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 1060. — *Sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces.*

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 413. — *Sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans l'évaluation des surfaces, des volumes, des masses, etc.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 564. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bonnet, concernant quelques propriétés générales des surfaces et des lignes tracées sur ces surfaces.*

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 494. — *Rapport sur une Note de M. Breton (de Champ), relative à quelques propriétés des rayons de courbure des surfaces.*

QUESTIONS DIVERSES ET RAPPORTS.

Corr. Éc. Pol. : t. I, p. 193. — *Du cercle tangent à trois cercles donnés.*

Ann. Gerg. : t. XI, p. 69. — *Rapport sur un Mémoire de M. Poncelet, relatif aux propriétés projectives des sections coniques.*

Ann. Gerg. : t. XVI, p. 349. — *Rapport sur un Mémoire de M. Poncelet, relatif aux propriétés des centres des moyennes harmoniques.*

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 1279. — *Remarques à l'occasion d'un Mémoire de M. Binet, concernant des théorèmes généraux sur les plans et les polaires des divers ordres.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 492. — *Rapport sur un Mémoire de M. Léon Lalanne ayant pour objet la substitution des plans topographiques à des tables numériques à double entrée.*

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 133. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bravais, relatif à certains systèmes, ou assemblages de points matériels.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 284. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bravais, intitulé :* Études de Cristallographie.

CHAPITRE III.

ANALYSE.

SOMMAIRE. — Principes de l'Analyse infinitésimale. — Leibnitz, Newton, Euler, Lagrange. — Théorie de Cauchy fondée sur la considération des limites et sur la notion de la continuité des fonctions. — Analyse des symboles imaginaires.

MÉMOIRES. — *Ouvrages classiques sur l'Analyse.* — *Calcul différentiel et intégral.* — Calcul des variations. — *Théorie des imaginaires.* — Ses applications. — Équivalences algébriques. — Quantités géométriques. — *Interpolation.* — *Résultats moyens.* — Méthode des moindres carrés. — Fonctions interpolaires; leur usage dans la théorie des fonctions symétriques. — *Valeurs moyennes des fonctions.* — *Questions diverses.* — Théorèmes d'Analyse et de Calcul intégral. — Fonctions et équations symboliques. — Fonctions discontinues. — Coefficients limitateurs. — Usage des régulateurs en Analyse. — *Ouvrages à consulter.*

SOMMAIRE.

Les principes sur lesquels repose l'Analyse infinitésimale ont été, à diverses reprises, l'objet spécial des méditations des savants. La question touche à ce qu'il y a de plus délicat dans la métaphysique des mathématiques et a été souvent résolue dans des sens très-différents. Newton rattachait sa méthode des *fluxions* à des considérations tirées de la Mécanique et du mouvement; mais le point de vue trop particulier auquel il se plaçait a été depuis longtemps abandonné. Il en a été de même du système peu commode de notations dont il faisait usage; celui qui a prévalu et qui subsiste encore aujourd'hui est dû à Leibnitz. Toutefois, l'œuvre du philosophe allemand a subi elle-même des modifications profondes dans la partie métaphysique. Leibnitz considérait les différentielles comme des accroissements infiniment petits

attribués aux variables, et appelait « équations différentielles » celles qui subsistent sous forme linéaire entre ces accroissements. Ces équations avaient le grave inconvénient de n'être exactes qu'au moment où les différentielles devenaient rigoureusement nulles, ce qui faisait disparaître à la fois et les différentielles et les équations elles-mêmes. L'exactitude et la clarté des démonstrations recevaient de là une atteinte sérieuse. Cette difficulté n'avait point arrêté Euler, qui n'hésitait pas à regarder les différentielles comme de véritables zéros ayant entre eux des rapports déterminés. Pour échapper aux embarras qui naissent de l'introduction de l'infini dans les formules, Lagrange entreprit de substituer, aux différentielles de Leibnitz, sa théorie des fonctions dérivées, au moyen de laquelle il espérait ramener l'Analyse infinitésimale à une question de pure algèbre. Mais sa méthode a été, dès son apparition, l'objet de critiques fondées. Elle repose sur ce principe que les accroissements des fonctions sont développables en série, suivant les puissances ascendantes de la variable, et, dans ce développement, la fonction dérivée est le coefficient de la première puissance de l'accroissement de la variable. Or, la possibilité d'un semblable développement est peu admissible *à priori;* loin de pouvoir servir de base à l'Analyse, il se présente au contraire comme une conséquence qui doit être établie avec le plus grand soin et qui, du reste, est sujette à de nombreuses restrictions. Aussi les principes du *Traité des fonctions* n'ont-ils pas tardé à tomber en désuétude.

Les méthodes actuellement suivies dans l'enseignement sont dues, en grande partie, à Cauchy; elles reposent sur la considération des limites et sur une théorie nouvelle de la continuité des fonctions. Ses idées ont été publiées d'abord dans le *Cours d'Analyse algébrique,* en 1821, puis

reproduites et développées dans divers Mémoires. C'est la première fois que les principes fondamentaux du calcul différentiel ont été présentés d'une manière simple et entièrement rigoureuse. Les notions relatives à la continuité, si familières aujourd'hui, sont données avec une entière précision, et il suffirait d'ajouter au cours d'Analyse algébrique, et aux leçons de l'École Polytechnique, quelques pages du « Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires », pour avoir, sous une forme élémentaire, ce qu'il y a de plus caractéristique et de plus essentiel dans l'art analytique, tel que nous l'a laissé le grand géomètre.

Ajoutons encore une remarque très-importante, sur laquelle Cauchy revient constamment, et qui concerne les conditions sous lesquelles subsistent les formules dont on fait usage en analyse. Il ne faudrait pas croire, en effet, que ces formules aient une généralité indéfinie ; en réalité, elles ne sont applicables que sous certaines conditions et pour certaines valeurs des variables qu'elles renferment, ainsi qu'on peut le voir notamment dans la théorie des séries. Avant Cauchy, on s'inquiétait peu des difficultés de ce genre et l'on était au contraire disposé à accepter, comme des démonstrations absolues, les inductions tirées de la généralité de l'algèbre. De là, une foule d'erreurs commises par des savants illustres tels que Leibnitz, Euler, etc.; aussi l'un des services les plus considérables que Cauchy ait rendus à la science, est précisément d'avoir contribué à rétablir sur ce point l'ordre et la rigueur. Nous ne pouvons entrer dans les détails ; citons seulement, à cause de sa célébrité et de son importance, cette remarque : que, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ étant nulle, ainsi que toutes ses dérivées, pour $x = 0$, la série de Ma-

claurin donnera, si l'on n'a pas égard au reste, le même résultat pour une fonction $f(x)$ et pour $f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Théorie des imaginaires. — Les quantités ou symboles imaginaires se présentent dès l'origine de l'algèbre ; on les retrouve à chaque pas dans la théorie des équations, dans celle des séries, dans celle des fonctions; enfin elles s'imposent nécessairement aux géomètres toutes les fois qu'ils veulent donner à leurs recherches la généralité qu'elles comportent.

La première tentative de Cauchy pour établir une théorie rigoureuse des imaginaires est exposée dans son cours d'Analyse algébrique. Afin de faire disparaître ce qu'il y a d'arbitraire et d'obscur dans l'usage de ces symboles, et pour donner aux démonstrations toute l'exactitude qu'on exige en géométrie, il considéra les équations imaginaires comme des formules symboliques qui, prises en elles-mêmes, n'ont aucun sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts en modifiant ou altérant, suivant des règles fixes, ou ces formules, ou les symboles qu'elles renferment. Dès lors, le signe $\sqrt{-1}$ devient simplement un instrument de calcul, dont l'introduction dans les formules permet d'arriver plus rapidement à la solution des questions proposées.

Plus tard, Cauchy entreprit de lever d'une autre manière les difficultés inhérentes aux expressions imaginaires, en les rattachant à la théorie des équivalences algébriques. Si deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, divisées par une troisième fonction $\varpi(x)$, donnent des restes égaux, on dira que ces deux fonctions sont équivalentes par rapport au diviseur $\varpi(x)$, et l'on écrira :

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \,[\text{mod. } \varpi(x)].$$

Cette notation, déjà employée par M. Kummer, constitue une équivalence algébrique. Cauchy montre comment on peut substituer ces équivalences aux équations imaginaires; il en déduit sans difficulté les propriétés essentielles des modules, et en fait ressortir l'utilité au moyen d'applications nombreuses, soit à l'analyse des sections angulaires, soit à la théorie des équations algébriques. Toutefois, Cauchy reconnaît lui-même qu'il est préférable de recourir à une autre méthode fondée sur l'interprétation géométrique du symbole $a + b\sqrt{-1}$.

Après avoir perfectionné de diverses manières la théorie des imaginaires, sous le rapport analytique, Cauchy essaya, en effet, d'en donner une interprétation géométrique. Cette dernière méthode, qui est de beaucoup la plus parfaite et la plus féconde en résultats, a définitivement prévalu, et Cauchy, après diverses tentatives, avait fini par l'adopter exclusivement. On doit consulter surtout, à ce sujet, un long Mémoire sur les quantités géométriques (*Nouv. Ex.*, t. IV, p. 157 et suiv.). Cauchy expose d'abord en quelques mots ce qui avait été fait avant lui : « La théorie des expressions imaginaires, dit-il, a été, à diverses époques, envisagée sous divers points de vue. Dès l'année 1806, M. l'abbé Buée et M. Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné, des expressions imaginaires, une interprétation géométrique contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées. Plus tard, M. Argand et d'autres auteurs, particulièrement MM. François, Faure, Mourey, Vallès, etc., ont publié des recherches qui avaient pour objet de développer ou de modifier l'interprétation dont il s'agit. Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue avant le siècle présent, et dès l'année 1786, par

un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre. Dans mon Analyse algébrique, publiée en 1821, je m'étais contenté de faire voir qu'on peut rendre rigoureuse la théorie des expressions imaginaires en considérant ces expressions et ces équations comme symboliques; mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$ et de remplacer la théorie des expressions imaginaires par la théorie des quantités que j'appellerai *géométriques*, en mettant à profit les idées émises et les notations proposées, non-seulement par les auteurs déjà cités, mais aussi par M. de Saint-Venant, dans un Mémoire digne de remarque sur les quantités géométriques. »

Voici, du reste, en quoi consiste l'idée fondamentale de cette théorie. Une expression imaginaire peut généralement se mettre sous la forme : $r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$, r désignant le module et p l'argument. Cela posé, l'argument p détermine une certaine direction de droite à partir d'une origine O, et, sur cette droite, le module r fixe la position d'un certain point A. La droite OA, ainsi définie en grandeur et en direction, sera une quantité géométrique et donnera la représentation géométrique de l'expression imaginaire. L'étude de ses variations se trouve dès lors ramenée à l'étude des variations d'un point dans un plan et se traite par les procédés ordinaires de l'Analyse. Les mêmes considérations s'étendent du reste à la représentation des fonctions imaginaires; elles ont donné à Cauchy le moyen de perfectionner, d'une manière inattendue, une foule de théories et de les amener à un degré d'exactitude

et de généralité qu'on ne soupçonnait même pas avant lui.

Il convient d'ajouter que Gauss avait adopté la même interprétation géométrique et suivi exactement la même voie dans les beaux Mémoires cités par Cauchy et consacrés à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques, à savoir que toute équation admet une racine imaginaire de la forme $a + b\sqrt{-1}$. L'un de ces Mémoires se termine même par une indication rapide des questions relatives aux fonctions à détermination multiple, qui devaient devenir l'occasion des plus grandes découvertes de Cauchy; c'est là un des points où l'on peut dire que ces deux grands géomètres se sont touchés de plus près. Mais la notion fondamentale des intégrales prises entre des limites imaginaires a entièrement fait défaut à Gauss; aussi a-t-il laissé au géomètre français, en Analyse, une supériorité égale à celle qu'on doit lui reconnaître et lui accorder sans contestation, en ce qui concerne la théorie des nombres.

Interpolation. — Dans les applications de l'Analyse à la Géométrie, à la Mécanique, à la Physique, etc., on a deux sortes de problèmes à résoudre. Il faut, en premier lieu, trouver les équations générales qui existent entre les divers éléments de la question et qui font connaître les lois mathématiques des figures ou des phénomènes étudiés. Ces équations renferment habituellement un certain nombre de constantes arbitraires ou de paramètres qui doivent ensuite être déterminés séparément. A cet effet on supposera qu'on ait recueilli une série d'observations ou d'expériences dont on introduira les résultats numériques dans les équations générales. On obtiendra ainsi un ensemble de relations qui permettront alors de calculer les valeurs des constantes. Le nombre de ces re-

lations de condition devra être au moins égal au nombre des constantes, et dans le cas où il lui sera supérieur, il s'agira de les combiner de manière à réduire le plus possible les erreurs probables des expériences. Tel est le problème général de l'interpolation. Pour le résoudre, on possédait deux méthodes principales, la méthode des différences et celle de Lagrange ; mais elles étaient sujettes à divers inconvénients. La première suppose que les valeurs attribuées à la variable indépendante soient équidistantes, ce qui est un cas exceptionnel. La formule de Lagrange, à la vérité, n'exige pas cette restriction et est directement applicable à des séries ordonnées suivant les puissances de la variable; mais si l'on veut atteindre une grande précision, il faut conserver dans la série un nombre considérable de termes, et alors on est conduit à des calculs d'une longueur excessive. En outre, les approximations successives s'obtiennent par des opérations à peu près indépendantes les unes des autres; de sorte que, plus on avance, plus les calculs se compliquent, sans qu'on puisse profiter des calculs antérieurs.

Amené, par suite de ses recherches sur la théorie de la lumière, à s'occuper de cette question, Cauchy trouva une méthode qui n'a pas d'inconvénients semblables et qui offre d'ailleurs des avantages nombreux. En premier lieu, ses formules se prêtent facilement aux calculs logarithmiques et s'appliquent aux développements en séries, quels que soient le mode de subdivision de la variable indépendante et la loi suivant laquelle les termes de la série se déduisent les uns des autres. En outre la détermination des approximations successives se fait avec une facilité de plus en plus grande, attendu que les différences des divers ordres dont on fait usage vont généralement en diminuant. Les formules étant disposées de manière

qu'on puisse y introduire tous les nombres donnés par les diverses observations, on fait ainsi concourir toutes les expériences au calcul, ce qui permet d'arriver à une plus grande exactitude. A chaque approximation, les valeurs obtenues sont précisément celles pour lesquelles la plus grande erreur à craindre est la moindre possible. Les formules indiquent d'elles-mêmes le moment où le calcul doit s'arrêter, en fournissant alors des différences comparables aux erreurs d'observation. Enfin les quantités qu'elles déterminent satisfont à des équations de condition qui ne permettent pas de commettre la plus légère faute de calcul sans que l'on s'en aperçoive immédiatement.

Cette méthode a été appliquée par Cauchy au calcul des expériences de Frauenhofer, dans son travail sur la dispersion de la lumière. Elle a été employée ensuite par divers savants, et a donné à M. Le Verrier l'idée des procédés nouveaux dont il s'est servi pour la détermination des coefficients numériques dans le développement de la fonction perturbatrice. (*Voir C. R.* : 1841, 2e *sem.*, p. 700.)

MÉMOIRES.

OUVRAGES CLASSIQUES SUR L'ANALYSE.

Cauchy a publié sur l'analyse, pendant la période de son professorat, plusieurs ouvrages classiques dont voici les titres :

Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique. — 1 vol., 1821.

Résumé des leçons données à l'École royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal. — 1 vol., 1823.

Leçons sur le calcul différentiel. — 1 vol., 1829.

Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. — 2 vol., 1826 et 1828.

Il faut y joindre :

Le *Recueil des Résumés analytiques*, publié à Turin. — Cinq livraisons, 1833.

Ces divers ouvrages ont pour objet l'exposition des idées et des méthodes nouvelles que Cauchy a introduites en Analyse; nous nous bornerons à donner une indication sommaire des matières traitées dans le *Cours d'Analyse*, qui est la plus importante de ces publications :

Revue préliminaire des fonctions élémentaires et réelles, que l'on considère en Algèbre et en Trigonométrie.

Des quantités infiniment petites ou infiniment grandes. — Définition de la continuité des fonctions. — Valeurs singulières des fonctions. — Détermination de la valeur des fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée.

Fonctions symétriques. — Fonctions alternées. — Fonctions homogènes. — Problème de l'interpolation.

Détermination des fonctions continues, d'une seule variable, propres à vérifier certaines conditions.

Théorie des séries. — Séries convergentes ou divergentes. — Règles de convergence. — Séries alternées. — Séries composées. — Séries ordonnées suivant les puissances d'une variable.

Expressions imaginaires. — Propriétés de leurs modules. — Formule de Moivre et racines imaginaires de l'unité. — Développements trigonométriques. — Fonctions imaginaires. — Extension des opérations élémentaires à ces fonctions. — Continuité des fonctions imaginaires. — Détermination des fonctions imaginaires d'après certaines conditions. — Séries imaginaires convergentes ou divergentes. — Série des modules. — Théorie des logarithmes imaginaires et des exponentielles trigonométriques.

Résolution des équations algébriques. — Théorème fondamental. — Équations binômes et trinômes. — Équations du troisième et du quatrième degré.

Développement des fractions rationnelles en fractions simples. — Séries récurrentes.

Neuf *Notes* relatives aux objets suivants : Théorie des quantités positives ou négatives. — Théorie des inégalités et des valeurs moyennes — Résolution numérique des équations; limites et approximation des racines. — Formule d'interpolation de Lagrange. — Nombres figurés. — Séries doubles. — Développements trigonométriques. — Propriétés des produits composés d'un nombre infini de facteurs.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Anc. Ex. : t. I, p. 145. — *Sur les divers ordres de quantités infiniment petites.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 188 (42 pages). — *Sur le rapport différentiel de deux grandeurs qui varient simultanément.*

Application à diverses questions de Géométrie et de Mécanique.

Nouv. Ex. : t. II, p. 230. — *Sur la nature des problèmes que présente le calcul intégral.*

Nouv. Ex. : t. III, p. 5 (45 pages). — *Mémoire sur l'Analyse infinitésimale.*

Définition des différentielles et des dérivées. — Continuité des fonctions. — Fonctions de plusieurs variables et dérivées des divers ordres.

Nouv. Ex. : t. III, p. 50 (81 pages). — *Mémoire sur le calcul des variations.*

Considérations générales. — Sur la continuité des fonctions et de leurs variations. — Sur les variations de plusieurs variables liées entre elles par des équations. — Formules générales pour obtenir les variations des divers ordres des fonctions d'une ou de plusieurs variables. — Sur les variations d'une intégrale définie, simple ou multiple. — Formes diverses de ces variations. — Sur les réductions que l'on peut effectuer à l'aide d'intégrations par partie, dans les variations d'une intégrale définie, simple ou multiple. — *Voir* sur le même sujet le troisième volume de *Calcul différentiel et intégral*, par M. l'abbé Moigno.

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 275. — *Exposé de quelques réflexions relatives aux principes du calcul infinitésimal.*

C. R. : 1844, 1er *sem.* p. 920. — *Rapport sur un Mémoire de M. Laurent, relatif au calcul des variations.*

THÉORIE DES IMAGINAIRES.

Nouv. Ex. : t. III, p. 361 (27 pages). — *Sur les fonctions des variables imaginaires.*

Fonctions rationnelles et entières. — Fonctions irrationnelles. — Fonctions exponentielles et trigonométriques. — Logarithmes des variables imaginaires.

Nouv. Ex. : t. IV, p. 87. - **C. R.** : 1847, 1er *sem.*, p. 1120. — *Sur la théorie des équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires.*

Nouv. Ex. : t. IV, p. 157 (200 pages). — Plusieurs *Mémoires sur la théorie des quantités géométriques et sur leurs applications.*

Considérations générales. — Avantages de l'emploi des quantités géométriques dans la trigonométrie rectiligne. — Étude des fonctions entières d'un degré infini, et, en particulier, des exponentielles. — Logarithmes des quantités géométriques. — Étude des puissances et des exponentielles dont les exposants sont des quantités géométriques. — Sur les valeurs des quantités géométriques considérées comme fonctions inverses des lignes trigonométriques. — Sur les fonctions des quantités géométriques, et sur la continuité de ces fonctions. — Sur les différentielles des quantités algébriques ou géométriques et sur les dérivées des fonctions de ces quantités. — Différentiation des fonctions explicites ou implicites de ces mêmes quantités.

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 168. — *Rapport sur un Mémoire de M. Cellérier, relatif à la théorie des imaginaires.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 271. — *Sur les fonctions de variables imaginaires.*

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 129. — *Sur l'application de la nouvelle théorie des imaginaires aux diverses branches des sciences mathématiques.*

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 250. — *Sur les quantités géométriques et sur une méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques de degré quelconque.*

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 632. — *Rapport sur deux Mémoires de M. Laurent, relatifs, l'un à la théorie des imaginaires, l'autre à la théorie des ondes lumineuses.*

INTERPOLATION. — RÉSULTATS MOYENS.

Journ. Liouv. : t. II, p. 193. — *Mémoire sur l'interpolation.*

Formules nouvelles pour résoudre le problème de l'interpolation, fondées sur le calcul des différences finies. — Mémoire déjà autographié en septembre 1835.

Éc. Pol. : cah. XX, p. 175 (47 pages). — *Sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers éléments déterminés par un grand nombre d'observations, pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite de son signe, devienne un minimum.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 775. — *Sur les fonctions interpolaires.*

Ces fonctions, étudiées surtout par Ampère, jouissent de propriétés remarquables. — Elles servent, en particulier, à déterminer les restes qui complètent la série de Taylor et d'autres séries analogues : par

exemple, celles qu'on emploie dans le calcul des différences finies. — — Elles servent également dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes. — Propriétés générales des fonctions interpolaires, et applications diverses.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 933.— *Mémoire sur divers points d'Analyse.*
Usage des fonctions interpolaires dans la détermination des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique donnée. — Cette détermination se ramène à la division algébrique, qui dépend elle-même d'un développement en série. — Application à la résolution numérique des équations.

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 283. — *Sur diverses formules d'Analyse.*
Formules d'interpolation qui déterminent la valeur générale d'une fonction entière d'une variable. — Même question pour une fonction entière de sinus et de cosinus du même arc.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 481, 552, 691 ; 1849, 2e *sem.*, p. 42 (40 pages). — *Recherches nouvelles sur les séries et sur les approximations des fonctions de très-grands nombres.*

C. R. : 1853, 2e *sem.*, p. 64 et 100. — *Remarques et développements divers au sujet d'une communication de M. Bienaymé, relative à la méthode des moindres carrés.*

C. R. : 1853, 2e *sem.*, p. 198.— *Sur les résultats moyens d'observations de même nature et sur les résultats les plus probables.*

C. R. : 1853, 2e *sem.*, p. 264 et 272. — *Sur la probabilité des erreurs qui affectent les résultats moyens d'observations de même nature.*

C. R. : 1853, 2e *sem.*, p. 326. — *Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum.*

C. R. : 1853, 2e *sem.*, p. 381. — *Sur les résultats moyens d'un très-grand nombre d'observations.*

VALEURS MOYENNES DES FONCTIONS.

Nouv. Ex. : t. IV, p. 145. - **C. R.** : 1844, 1er *sem.*, p. 558 ; 1845, 1er *sem.*, p. 119 ; 1846, 2e *sem.*, p. 740. — Divers *Mémoires sur les valeurs moyennes des fonctions.*
Théorèmes concernant cette théorie.

Nouv. Ex. : t. IV, p. 153. — *Sur l'emploi des théorèmes relatifs aux valeurs moyennes des fonctions dans l'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles.*

C. R., 1848 : 1er *sem.*, p. 624, 666 ; 2e *sem.*, p. 6, 105. — *Sur les valeurs moyennes des fonctions et sur les fonctions isotropes.*

C. R. : 1848, 2e *sem.*, p. 37. — *Théorèmes divers sur les fonctions différentielles et sur les valeurs moyennes des fonctions.*

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 341. — *Sur quelques théorèmes dignes de remarque, concernant les valeurs moyennes des fonctions de trois variables indépendantes.*

C. R. : 1852, 1er *sem.*, p. 159. — *Sur le changement de variable indépendante dans les moyennes isotropiques.*

QUESTIONS DIVERSES.

Anc. Ex. : t. I, p. 1. — *Sur l'analyse des sections angulaires.*

Anc. Ex. : t. I, p. 160. - **Nouv. Ex.** : t. II, p. 137. - **C. R.** : 1841, 2e *sem.*, p. 1087, 1130 ; 1845, 2e *sem.*, p. 347, 407. — *Sur divers théorèmes d'Analyse et de Calcul intégral.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 287. — *Sur quelques théorèmes relatifs à des sommes d'exponentielles.*

Nouv. Ex. : t. IV, p. 191. — *Sur quelques définitions généralement adoptées en arithmétique et en algèbre.*

Nouv. Ex. : t. IV, p. 232. — *Sur les fonctions entières d'un degré infini, et en particulier sur les exponentielles.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 410. — *Remarques à l'occasion d'un Mémoire de M. Libri, sur l'emploi des fonctions continues dans l'Analyse pour la recherche des formules générales.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 377, 449. — *Sur l'emploi des équations symboliques dans l'Analyse.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 1215. — *Sur la théorie analytique des maxima maximorum et des minima minimorum.*

Application au calcul des limites et à l'astronomie.

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 116 ; 1849, 1er *sem.*, p. 277. — *Sur les fonctions continues ou discontinues.*

Propriétés remarquables et très-générales de ces fonctions.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 546 ; 1851, 2e *sem.*, p. 649. — *Sur les modules des fonctions.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 757. — *Sur les maxima et les minima conditionnels.*

C. R. : 1848, 2e *sem.*, *passim*. — Énoncés de divers Mémoires relatifs à des questions d'Analyse.

C. R. : 1852, 1er *sem.*, p. 265. — *Sur l'application du calcul infinitésimal à la détermination des fonctions implicites.*

C. R. : 1853, 2e *sem.*, p. 150. — *Sur les coefficients limitateurs.*

C. R. : 1854, 2e *sem.*, p. 169. — *Sur l'induction en Analyse et sur l'emploi des formules symboliques.*

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 261. — *Sur les avantages que présente l'introduction d'un paramètre variable, et des notations propres au calcul des variations, dans quelques-unes des principales formules de l'Analyse infinitésimale.*

C. R. : 1856, 2e *sem.*, p. 169. — *Sur les produits symboliques et les fonctions symboliques.*

C. R. : 1856, 2e *sem.*, p. 261. — *Sur la transformation des fonctions symboliques en moyennes isotropiques.*

C. R. : 1857, 1er *sem.*, p. 849. — *Sur les avantages que présente l'emploi des régulateurs dans l'analyse mathématique.*

Su i Metodi analitici. — Mémoire publié à Milan dans le recueil intitulé : *Biblioteca Italiana.*

Dei metodi analitici Memoria. — Roma, 1843.

Ouvrages à consulter.

Traité de calcul différentiel et intégral, d'après les méthodes de Cauchy, par M. l'abbé Moigno.

Traité du calcul des variations, par le même auteur.

CHAPITRE IV.

INTÉGRALES DÉFINIES ET RÉSIDUS.

SOMMAIRE. — Analyse des premiers Mémoires de Cauchy sur les intégrales définies. — Intégrales doubles. — Intégrales singulières. — Intégrales extraordinaires. — Influence de l'ordre des intégrations. — Analyse du Mémoire sur les intégrales définies imaginaires. — Principes et notations du calcul des résidus.

MÉMOIRES. — *Théorie des intégrales définies.* — Sur les divers genres d'intégrales définies. — Détermination et réduction d'un grand nombre d'intégrales définies. — Intégrales eulériennes. — Relations entre les intégrales définies et la théorie des différences finies. — *Calcul des résidus.* — Applications diverses de ce calcul aux équations algébriques, aux séries, aux équations différentielles, aux questions de Physique mathématique, etc. — *Différences finies.*

SOMMAIRE.

La théorie des intégrales définies occupe dans l'Analyse une place considérable, et intervient par ses résultats dans la plupart des questions de science pure ou appliquée que les géomètres ont à traiter. Euler, Laplace, Legendre avaient déjà étudié avec succès les formules de ce genre, mais les procédés dont ils se servaient étaient souvent insuffisants au point de vue de la rigueur des raisonnements. Leurs calculs reposaient sur le passage du réel à l'imaginaire, et, à cause même de l'état d'imperfection où se trouvait la théorie des symboles imaginaires, les transformations auxquelles on était conduit ne pouvaient être considérées, suivant les paroles mêmes de Laplace, que « comme des moyens de découverte semblables à l'induction dont les géomètres font depuis longtemps usage. Mais ces moyens, quoique employés

avec beaucoup de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats. » Il fallait donc, avant tout, établir le passage du réel à l'imaginaire, dans les intégrales, sur une analyse directe et rigoureuse; c'est ce que fit Cauchy dans un beau Mémoire sur les intégrales définies, présenté à l'Institut en 1814. Les résultats de ses premières recherches lui permirent, dès l'année suivante, de traiter avec succès la question difficile du mouvement des ondes; en outre, l'étude des anomalies que présentent les intégrales, dites *singulières*, le conduisit bientôt au calcul des *résidus*, l'une des théories les plus utiles et les plus fécondes de l'Analyse. Quelques années plus tard, en 1825, il réalisait un progrès plus essentiel encore, en publiant ses recherches sur les « intégrales définies prises entre des limites imaginaires. » Ce dernier travail, qui est un véritable chef-d'œuvre, a puissamment contribué aux perfectionnements de l'Analyse; il a été, en particulier, le point de départ des nombreux travaux entrepris, depuis Cauchy, pour constituer avec un succès extraordinaire la théorie si délicate et si difficile des fonctions doublement périodiques. Les considérations relatives aux intégrales définies reparaissent d'ailleurs constamment dans la longue suite des Mémoires de Cauchy sur les diverses branches des mathématiques : sur l'Analyse pure, la Mécanique, la Physique et l'Astronomie. On peut donc dire que ses recherches sur cette matière sont le fondement principal de presque tous ses autres travaux. Il convient donc d'en présenter le résumé avec quelques détails propres à en faire ressortir toute l'importance.

Le Mémoire de 1814 sur les intégrales définies fut composé par Cauchy à l'âge de vingt-quatre ans, à l'époque où, renonçant aux fonctions actives d'ingénieur, il

revint de Cherbourg à Paris, avec l'intention de se livrer exclusivement à l'étude et au progrès des sciences mathématiques.

Dans une première partie, Cauchy s'occupe de discuter avec soin les équations qui autorisent le passage du réel à l'imaginaire. Sa méthode repose sur l'analyse des intégrales doubles; il donne, pour le calcul et la transformation de ces intégrales, un ensemble de règles, d'où l'on déduit ensuite une foule de formules utiles pour la détermination des intégrales définies simples.

Une intégrale définie double

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{z_0}^{z_1} f(x, z)\,dx\,dz$$

correspond, en géométrie, à la portion de l'aire d'une surface ayant pour équation $y = f(x, z)$ et qui se projette sur le plan des xz suivant un rectangle déterminé. Quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les intégrations, le résultat sera généralement le même, mais les deux opérations ne présentent pas toujours une égale facilité. Quelquefois on arrivera facilement au résultat final en commençant par l'une des variables, tandis qu'en commençant par l'autre on sera conduit à des transcendantes d'un ordre élevé. Dans ce cas, en exprimant que les formules définitives sont identiques, on obtiendra des relations qui permettront de déterminer la valeur de la fonction transcendante dont le calcul direct eût été souvent impraticable. Cette méthode était déjà connue des géomètres, mais Cauchy lui donne une extension nouvelle en cherchant, *à priori*, les conditions auxquelles doit satisfaire une intégrale double pour que l'on puisse effectuer immédiatement la première intégration, soit par rapport à x, soit par rapport à z. Il suffit pour cela de

partir d'une différentielle exacte $p\,dx + q\,dz$, satisfaisant par conséquent à la condition $\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx}$, et de prendre pour y la valeur commune de ces deux dérivées partielles.

Soit par exemple y une fonction quelconque de x et de z, et Y une autre fonction de y, l'expression $Y\,dy$ sera une différentielle exacte et satisfera à la condition ci-dessus. Il en sera encore de même si l'on prend pour y une valeur de la forme $M + N\sqrt{-1}$, M et N désignant deux fonctions réelles de x et de z. Mais alors l'équation de condition se partage en deux autres par la séparation des parties réelles et imaginaires. Celles-ci, prises séparément, donnent deux expressions qui peuvent être substituées à la place de y, et si l'on effectue les intégrations, on obtient deux équations entre des intégrales définies relatives, les unes à la variable x, les autres à la variable z. On a ainsi un moyen très-fécond de transformation qui permet de déterminer un grand nombre d'intégrales particulières.

La méthode se généralise encore quand, après avoir fixé la nature de la fonction y, on la transforme au moyen des symboles imaginaires. Si l'on pose, par exemple, $y = p\cos r$, p et r désignant deux fonctions de x, et si l'on remplace ensuite x par $u + v\sqrt{-1}$, l'équation se partagera d'abord en deux autres par la séparation des imaginaires. On remplacera ensuite $\cos r$ par son expression en exponentielles; il y aura alors un nouveau partage, ce qui produira en tout quatre relations entre des intégrales de forme déterminée. On aura en même temps l'avantage de rapprocher, et de rattacher à une source commune, des formules déjà connues pour la plupart, mais qui, ayant été obtenues par des procédés isolés,

n'étaient unies par aucun lien. Les relations auxquelles on arrive sont en général assez compliquées, mais on peut les simplifier au moyen de certaines hypothèses plus restreintes; on obtient notamment des résultats simples et élégants en prenant les limites des intégrales égales à zéro et à l'infini.

Dans la seconde partie de son Mémoire, Cauchy va plus loin, en développant une théorie qui lui appartient en propre et qui constituait, suivant les termes du rapporteur Legendre, « une véritable découverte en Analyse. » Il s'agit de la théorie des *intégrales singulières*, dont l'auteur devait tirer un si grand parti pour ses recherches ultérieures.

On a coutume de dire que, dans l'évaluation d'une intégrale double, l'ordre des intégrations est indifférent; toutefois cette proposition, vraie en général, est sujette à d'importantes restrictions. Cauchy commence par examiner certains cas où la règle est en défaut et montre que, non-seulement l'intégrale ne reprend pas la même valeur, mais qu'elle peut même se présenter sous une forme complétement indéterminée. Après avoir constaté le fait, il fallait en trouver la cause, en donner l'explication et évaluer les modifications résultant du changement d'ordre des intégrations. Cauchy fait voir que l'anomalie se présente toutes les fois que, après avoir effectué la première intégration, la fonction soumise au signe $\int$ affecte une forme indéterminée pour des valeurs des variables comprises entre les limites de l'intégrale. Dans ce cas, d'ailleurs, l'indétermination est tout à fait distincte de celle qui se présente pour les fonctions d'une seule variable sous la forme $\frac{0}{0}$; celle-ci n'est qu'apparente et l'analyse donne le moyen de la faire disparaître. Pour

les intégrales, au contraire, l'indétermination est souvent absolue, et on ne peut la lever qu'en établissant arbitrairement une relation entre les limites de l'intégration partielle, qui, de leur nature, sont complétement indépendantes.

Cela posé, imaginons qu'on ait figuré, dans le rectangle de projection, le point auquel correspond l'indétermination, et qu'on ait tracé, autour de ce point, une aire infiniment petite ω; l'intégrale singulière sera la portion de l'intégrale totale relative à cette aire; c'est encore la limite de la valeur que prend l'élément différentiel de la surface pour le point considéré, et cette limite dépendra généralement de la loi suivant laquelle on fera tendre vers zéro l'aire élémentaire ω. Soit $x = a$ la valeur qui rend infinie une fonction $\varphi(x)$, on posera

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{a+\eta}^{x_1} \varphi(x)\,dx$$
$$+ \int_{a-\varepsilon}^{a+\eta} \varphi(x)\,dx;$$

les deux premiers termes du second membre constituent la valeur *principale* de l'intégrale, tandis que le troisième représente l'intégrale *singulière*. Il y a du reste trois cas à considérer suivant que l'indétermination se rapporte à un point situé à l'intérieur du rectangle de projection, ou sur l'un des côtés, ou bien encore à l'un des sommets.

Le Mémoire est suivi de deux suppléments, dans lesquels l'auteur se propose de répondre à diverses objections qui lui avaient été adressées par Legendre; il est, de plus, accompagné de quelques Notes composées à l'époque de l'impression, en 1825, et destinées à compléter ou à justifier certains points de détail.

Mémoire sur les intégrales définies imaginaires. — Ce Mémoire peut être considéré comme le plus important des travaux de Cauchy, et les hommes compétents n'hésitent pas à le comparer à tout ce que l'esprit humain a jamais produit de plus beau dans le domaine des sciences.

Après avoir rappelé ses recherches antérieures sur les intégrales définies prises entre des limites réelles, l'auteur annonce qu'il va appliquer la même méthode aux intégrales prises entre des limites imaginaires. Déjà Laplace et d'autres savants, tels que MM. Brisson, Ostrogradski de Saint Pétersbourg, avaient étudié les formules de ce genre et en avaient déduit d'utiles résultats; mais personne ne s'était encore occupé de définir exactement le degré de généralité que comportent ces intégrales et de préciser ou de classer le nombre des valeurs distinctes dont elles sont susceptibles. Tel est le point essentiel qu'il fallait d'abord éclaircir.

Pour définir l'intégrale

$$A + B\sqrt{-1} = \int_{x_0 + y_0\sqrt{-1}}^{x_1 + y_1\sqrt{-1}} f(z)\,dz$$

dans laquelle on suppose $z = x + y\sqrt{-1}$, on la considérera comme la limite de la somme de ses éléments différentiels. On introduira en outre une variable auxiliaire t et l'on posera $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, φ, ψ désignant deux fonctions de forme arbitraire. L'intégrale se présentera alors sous la forme

$$A + B\sqrt{-1} = \int_{t_0}^{t_1} (\varphi' + \psi'\sqrt{-1})\, f(\varphi + \psi\sqrt{-1})\,dt.$$

Si l'on admet que la fonction f reste finie et continue entre les limites de l'intégration, on démontre, par les

principes du calcul des variations, que la valeur de l'intégrale est indépendante des fonctions φ et ψ; ou bien encore, en se reportant à la théorie géométrique des symboles imaginaires, qu'elle est indépendante du contour suivi dans l'intégration. On supposera en second lieu que la fonction f devienne infinie entre les mêmes limites, on désignera par $a + b\sqrt{-1}$ l'une des racines simples de l'équation $\frac{1}{f(z)} = 0$, et l'on représentera par F la limite vers laquelle tend l'expression $\varepsilon f(a + b\sqrt{-1} + \varepsilon)$ quand ε tend vers zéro. On trouvera alors que l'intégrale prend une nouvelle valeur $A' + B'\sqrt{-1}$, et si on la compare à la valeur précédente, on aura la relation fondamentale :

$$A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) = \pm \pi F \sqrt{-1}.$$

Le double signe du second membre dépendra du signe de la variation $\varphi'\delta\psi - \psi'\delta\varphi$. Enfin si l'on désigne par $A'' + B''\sqrt{-1}$ ce que devient l'intégrale quand $\delta\varphi$ et $\delta\psi$ changent de signe, on aura

$$\Delta = A'' + B''\sqrt{-1} - (A' + B'\sqrt{-1}) = \pm 2\pi F \sqrt{-1}.$$

Lorsque $a + b\sqrt{-1}$ est une racine multiple de l'ordre m, il faut substituer à la fonction F une dérivée de l'ordre $m - 1$, et l'on obtient la nouvelle formule :

$$\Delta = A'' + B''\sqrt{-1} - (A' + B'\sqrt{-1}) = \pm \frac{2\pi F^{m-1}\sqrt{-1}}{1.2.3\ldots(m+1)}.$$

Si, de plus, la fonction $f(z)$ passe plusieurs fois par l'infini entre les limites de l'intégration, on obtiendra une série de termes de même forme, et l'on aura la formule

générale :

$$\Delta = \pm 2\pi(F_1 + F_2 + F_3 + \ldots)\sqrt{-1}.$$

Considérons maintenant un rectangle dont les sommets extrêmes A et B auront pour coordonnées $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, c'est-à-dire les valeurs de x, y qui limitent l'intégration. On pourra passer de A à B en suivant une infinité de contours. Si l'on suit la diagonale AB, on aura la valeur *moyenne* de l'intégrale; si l'on suit les contours mêmes du rectangle, on aura les valeurs *extrêmes*. Quant aux intégrales relatives à deux contours intermédiaires, elles auront la même valeur si la fonction $f(z)$ ne devient infinie pour aucun des points situés sur ces contours ou compris entre eux. Dans le cas contraire, l'intégrale prendra des valeurs distinctes dont la différence sera déterminée par la formule précédente. Enfin, si quelques-uns des points *critiques* sont situés sur les contours eux-mêmes, la différence entre les deux valeurs de l'intégrale se présentera généralement sous une forme infinie ou indéterminée.

Après avoir exposé les principes de sa théorie, Cauchy passe aux applications. Supposons par exemple que l'on compare les valeurs *extrêmes* des intégrales, on aura la formule :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x + y_0\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{y_1} f(x_1 + y\sqrt{-1})\,dy$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} f(x + y_1\sqrt{-1})\,dx - \sqrt{-1}\int_{y_0}^{y_1} f(x_0 + y\sqrt{-1})\,dy$$
$$= 2\pi(F_1 + F_2 + F_3 + \ldots)\sqrt{-1}.$$

Celle-ci subsiste pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z, et elle équivaut à deux équations distinctes par la séparation des imaginaires; on peut ainsi en dé-

duire une foule de résultats utiles entre des expressions réelles. On trouve dans le Mémoire de Cauchy des applications nombreuses de sa méthode; on remarquera en particulier les résultats qui correspondent au cas où les limites de l'intégrale sont zéro et l'infini.

Lorsque la fonction f s'évanouit pour $x = \pm\infty$ quel que soit y, et pour $y = \pm\infty$ quel que soit x, la formule générale se réduit simplement à $\Delta = 0$. Si l'on suppose, de plus, que la fonction f soit rationnelle, on en conclut la formule d'interpolation de Lagrange.

Si l'équation $\frac{1}{f(z)} = 0$ admet une infinité de racines, ainsi que cela a lieu pour certaines équations transcendantes, la formule générale renferme une infinité de termes et peut être appliquée avec avantage à la sommation de certaines séries; ce dont Cauchy donne plusieurs exemples remarquables.

Il était ensuite naturel de rechercher si les mêmes principes étaient applicables à la détermination et à la transformation des intégrales doubles ou multiples prises entre des limites réelles ou imaginaires. Cauchy affirme qu'il en est ainsi, mais ses prévisions n'ont pas encore été réalisées; l'extension dont il s'agit est sujette à d'immenses difficultés et n'a pu être effectuée, ni par Cauchy, ni par d'autres, de sorte que le problème demeure intact. Voici en quoi consisterait la question pour les intégrales doubles. On donne une intégrale

$$\int_a^b dz \int_{a'}^{b'} dz' f(z, z'),$$

on pose

$$z = \varphi(t, u) + \sqrt{-1}\,\psi(t, u), \quad z' = \varphi_1(t, u) + \sqrt{-1}\,\psi_1(t, u),$$

t et u désignant des variables réelles; $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1$ des fonc-

tions réelles, mais arbitraires. Cela posé, il faudrait rechercher l'influence de cette substitution dans l'intégrale double et analyser ce qui arrive quand la fonction f passe par l'infini ou par des valeurs indéterminées. Un problème analogue, et lié intimement au précédent, aurait pour objet l'étude des intégrales portant sur des différentielles totales de la forme

$$\int (\mathrm{P}dz + \mathrm{Q}dz'),$$

P et Q désignant deux fonctions des variables z et z'.

Calcul des résidus. — Le calcul des résidus, qui joue un si grand rôle dans la plupart des travaux de Cauchy, se rattache intimement à la théorie des intégrales définies; on en verra des applications nombreuses dans les chapitres suivants; pour le moment nous nous bornerons à donner une idée des principes sur lesquels il repose.

Supposons qu'une fonction $f(x)$ devienne infinie pour $x = a$ et que a soit racine simple de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$, l'expression $(x - a) f(x)$ aura généralement une valeur déterminée pour $x = a$. Ce sera le résidu de la fonction proposée pour $x = a$, et on le représentera par la notation

$$\mathcal{E} \frac{f(x)(x-a)}{[(x-a)]}.$$

Si la quantité a est, au contraire une racine du degré m de multiplicité, le résidu sera la valeur finie vers laquelle tend l'expression $(x - a)^m f(x)$ pour $x = a$. Cette définition même indique la marche à suivre pour la détermination du résidu. On posera $\frac{f(x)}{(x-a)^m} = \varphi(x)$, et comme ce quotient ne devient plus infini pour $x = a$, on

pourra le développer au moyen de la série de Taylor; on divisera tous les termes par $(x-a)^m$, et, dans le développement ainsi préparé, le coefficient du terme qui a $x-a$ en dénominateur sera le résidu cherché. On écrira :

$$\mathcal{E}\frac{f(x)(x-a)}{[(x-a)]} = \frac{\varphi^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\left\{\frac{d^{m-1}[f(x)(x-a)^m]}{dx^{m-1}}\right\}_{x=a}.$$

Telle est la notation fondamentale introduite par Cauchy dans sa théorie des résidus, dont les applications embrassent toute l'Analyse.

Le germe de cette théorie se trouvait déjà, ainsi que Cauchy l'a remarqué, dans un Mémoire d'Euler intitulé : *Nova Methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi*, et inséré dans les Actes de l'Académie de Saint-Pétersbourg pour l'année 1780. Mais Euler n'avait pas aperçu les conséquences qu'on pouvait en déduire; il lui manquait pour cela la connaissance des relations qui existent entre les résidus et les intégrales définies. Cauchy, au contraire, à la suite de ses beaux travaux sur les intégrales définies, contenus principalement dans les deux Mémoires de 1814 et de 1825 que nous avons cités précédemment, se trouvait en mesure d'approfondir la question et d'en donner une solution complète. Ses premières recherches sur les résidus sont exposées dans le recueil des *Anciens Exercices*, année 1826, où l'on trouve les principes mêmes du nouveau calcul ainsi que de nombreuses applications; nous le verrons bientôt faire un usage continuel de ce calcul pour la solution des questions les plus difficiles et les plus variées. Parmi ces applications, nous devons citer en particulier : la décomposition des fractions rationnelles en fractions

simples, la formule d'interpolation de Lagrange, le calcul des fonctions symétriques, la résolution des équations algébriques et transcendantes, le développement des fonctions en séries, la détermination des intégrales définies, l'intégration des équations différentielles, et enfin de nombreuses applications à la solution des problèmes de Physique mathématique.

L'usage du calcul des résidus ne s'est pas généralisé parmi les géomètres autant que l'importance de cette méthode le ferait désirer; il faut l'attribuer sans doute aux notations un peu compliquées dont se servait Cauchy; mais ces notations pourraient être notablement simplifiées, et la nature des résultats obtenus montre assez quel avantage il y aurait à introduire ce calcul dans l'Analyse d'une manière définitive.

MÉMOIRES.

THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Sav. Étr. : t. I, p. 599 (200 pages). - **Bull. Phil** : 1814, p. 161, 185. — *Mémoire sur la théorie des intégrales définies*, lu à l'Institut, le 22 août 1814, et imprimé en 1825.

Ce Mémoire est précédé d'un Rapport de Legendre.

Sav. Étr. : t. I, p. 3. — *Mémoire sur la propagation des ondes à la surface d'un liquide pesant.*

La discussion de cette question exigeait l'étude préliminaire de plusieurs points d'Analyse qui, pour la plupart, concernent la théorie des intégrales définies et leur développement en séries. Ces recherches accessoires ne pouvaient être introduites sans inconvénient dans le corps même du travail principal. Elles sont exposées dans une suite de vingt Notes placées en appendice. La plupart accompagnaient le Mémoire primitif, les autres ont été ajoutées à l'époque de l'impression.

Bull. Phil. : 1817, p. 121; 1818, p. 178. — *Sur une loi de réciprocité qui existe entre certaines fonctions.*

Ann. Gerg. : t. XVI, p. 97, et t. XVII, p. 84. — *Mémoire sur les intégrales définies, où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies connues et celles d'un grand nombre d'autres.*

Éc. Pol. : cah. XXVIII, p. 147 (102 pages). — *Sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies, et sur la conversion des différences finies en intégrales de cette espèce.*

Sur la transformation des intégrales simples par le moyen des intégrations doubles. — Applications diverses. — Sur une formule générale relative à la transformation des intégrales simples prises entre les limites o et ∞ de la variable. — Sur la transformation des différences finies des puissances en intégrales définies

Ce Mémoire avait été présenté à l'Institut le 2 janvier 1815.

Mém. Dét. : 1825 (68 pages). - **Bull. Fér.** : t. III, p. 214 (*Extrait*). — *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*

Il a été rendu compte, plus haut, de ce travail important.

Anc. Ex. : t. I, p. 54. — *Sur une formule relative à la détermination des intégrales simples prises entre des limites* o *et* ∞ *de la variable.*

Anc. Ex. : t. I, p. 57. — *Sur les intégrales dites extraordinaires.*

Ce Mémoire se rapporte à la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies.

Anc. Ex. : t. I, p. 85. - **Bull. Phil.** : 1822. — *De l'influence que peut avoir, sur une intégrale double, l'ordre dans lequel on effectue les intégrations.*

Anc. Ex. : t. I, p. 95. — *Sur diverses relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies.*

Anc. Ex. : t. II, p. 91. — *Sur les propriétés de la fonction* Γ.

Anc. Ex. : t. II, p. 112. — *Sur la transformation des fonctions d'une seule variable en intégrales doubles.*

Consulter sur cette question les travaux de Fourier. — Cauchy remplace, dans ses formules, les lignes trigonométriques, dont Fourier faisait usage, par des exponentielles imaginaires. — On trouvera d'autres développements sur cette matière dans le XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, dans l'*Analyse des Travaux de l'Académie* pour 1821, et dans le *Bulletin de la Société Philomathique* pour la même année.

Anc. Ex. : t. II, p. 125. — *De la différentiation sous le signe* $\int$.

Intégrales multiples. — Intégrales singulières. — Application à une intégrale dont on fait usage en astronomie.

Anc. Ex. : t. II, p. 157. — *Sur la transformation des fonctions de plusieurs variables en intégrales multiples.*

Anc. Ex. : t. II, p. 233. — *Sur la valeur de l'intégrale définie* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx$, *dans laquelle* a, b, c *désignent des constantes réelles ou imaginaires.*

Anc. Ex. : t. II, p. 341. — *Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies.*

Anc. Ex. : t. V, p. 1. — *Sur la transformation et la réduction d'une certaine classe d'intégrales.*

Mém. Dét. : 1831. - **Bull. Fér.** : 1831, t. XVI, p. 119. — *Mémoire sur les applications du calcul des résidus et du calcul des limites.*

Ce Mémoire renferme des résultats importants pour la théorie des intégrales définies. — Le *Bulletin de Férussac* contient un extrait de diverses formules tirées du Mémoire principal.

Nouv. Ex. : t. II, p. 292. — *Sur quelques propriétés des intégrales définies, simples ou multiples.*

Application à diverses questions de géométrie.

Nouv. Ex. : t. II, p. 358 (40 pages). — *Sur la théorie des intégrales définies singulières.*

L'objet de ce Mémoire est surtout de montrer comment on peut appliquer la théorie des intégrales singulières à l'évaluation des fonctions de très-grands nombres. On arrivera ainsi à séparer, dans ces dernières, la partie qui reste finie, ou qui devient même infinie avec ces nombres, de celle qui décroît indéfiniment avec eux. — Application de la méthode à diverses fonctions, et notamment aux fonctions Γ d'Euler.

Nouv. Ex. : t. IV, p. 128. — *Sur le changement de variables dans les intégrales.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 1008. — *Sur les intégrales multiples.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 33. — *Sur l'emploi de la transformation des coordonnées, pour la détermination et la réduction des intégrales définies multiples.*

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 847. — *Rapport sur un Mémoire de M. Broch, relatif à une certaine classe d'intégrales.*

A l'occasion de ce Rapport, Cauchy réfute une assertion erronée d'après laquelle le géomètre Abel serait mort dans la misère.

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 1029, 1071, 1145; 2e *sem.*, p. 47, 181 (36 pages). — *Sur la détermination et la réduction d'un grand nombre d'intégrales nouvelles, et en particulier des intégrales dont les dérivées renferment une ou plusieurs fonctions implicites d'une même variable.*

Transformation des sommes d'intégrales.

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 422. — *Sur la théorie des intégrales définies singulières, appliquée généralement à la détermination des intégrales définies, et en particulier à l'évaluation des intégrales eulériennes.*

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 433. — *Sur la réduction des exponentielles au moyen d'intégrales définies.*

Simple énoncé.

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 376; 1844, 2e *sem.*, p. 67. — *Recherches sur les intégrales eulériennes.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 377, 449. — *Sur des théorèmes nouveaux et de nouvelles formules qui se déduisent de quelques équations symboliques.*

Transformation des intégrales aux différences finies en intégrales aux différences infiniment petites.

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 1072. — *Sur la substitution des fonctions non périodiques aux fonctions périodiques dans les intégrales définies.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 789. — *Sur les valeurs principales et générales des intégrales curvilignes dans lesquelles la fonction sous le signe* $\int$ *devient infinie en un point de la courbe donnée.*

Simple énoncé.

C. R. : 1854, 2e *sem.*, p. 129. — *Sur une formule de M. Auger et sur d'autres formules analogues.*

Il s'agit d'une intégrale définie qui se rencontre dans les calculs astronomiques.

CALCUL DES RÉSIDUS.

Anc. Ex. : t. I, p. 11. — *Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal.*

C'est dans ce Mémoire que les principes du calcul des résidus sont exposés pour la première fois.

Définition des résidus. — Applications diverses. — Formule d'interpolation de Lagrange. — Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. — Formules pour la détermination des intégrales définies. — Sommation d'une foule de séries, notamment de séries périodiques. — Intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites, à coefficients constants, avec ou sans dernier terme variable. — — Série de Lagrange et séries analogues. — Résolution des équations algébriques ou transcendantes.

Anc. Ex. : t. I, p. 44. — *Application du calcul des résidus à la sommation de plusieurs suites.*

Anc. Ex. : t. I, p. 95. — *Sur diverses relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies.*

Anc. Ex. : t. I, p. 133. — *Sur quelques formules relatives à la détermination du résidu intégral d'une fonction donnée.*

Anc. Ex. : t. I, p. 167. — *Sur quelques transformations applicables aux résidus des fonctions, et sur le changement de variable indépendante dans le calcul des résidus.*

Anc. Ex. : t. I, p. 202. — *Application du calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles linéaires et à coefficients constants.*

Anc. Ex. : t. I, p. 205. — *Sur les limites placées à droite et à gauche du signe* $\int$ *dans le calcul des résidus.*

Détermination et développement en séries des intégrales définies.

Anc. Ex. : t. I, p. 262. — *Application du calcul des résidus à l'intégration de quelques équations différentielles linéaires, à coefficients variables.*

Anc. Ex. : t. I, p. 339. — *Usage du calcul des résidus pour déterminer la somme des fonctions semblables des racines des équations algébriques ou transcendantes.*

Anc. Ex. : t. II, p. 141. — *Sur les fonctions réciproques.*

Anc. Ex. : t. II, p. 245 (32 pages). — *Sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus.*

Anc. Ex. : t. II, p. 297. — *Usage du calcul des résidus pour la sommation et la transformation des séries, dont le terme général est une fonction paire du nombre qui représente le rang de ce terme.*

Anc. Ex. : t. II, p. 315. — *Sur un Mémoire d'Euler dans lequel se trouve le germe du calcul des résidus.*

Ce Mémoire a pour titre : *Nova Methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi*, et fait partie des *Actes de l'Académie* de Saint-Pétersbourg. Il manquait à Euler la connaissance des relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies.

Anc. Ex. : t. II, p. 341 (35 pages). — *Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 161. — *Sur la détermination du résidu intégral de quelques fonctions.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 174 (40 pages). - **C. R.** : 1843, 2e *sem.*, p. 572. — *Usage du calcul des résidus pour l'évaluation ou la transformation des produits composés d'un nombre fini ou infini de facteurs.*

Décomposition de certaines fonctions en fractions simples. — Décomposition des produits composés d'un nombre infini de facteurs en séries ordonnées suivant les puissances entières d'une variable.

Mém. Dét. : 1827 (56 pages). — *Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique.*

Transformation des fonctions en séries d'exponentielles, soit réelles, soit imaginaires. — Intégration des équations aux différences partielles assujetties à vérifier des conditions semblables à celles qu'on rencontre dans les questions de physique mathématique, quand on considère des masses solides ou fluides dont les dimensions restent finies. — Exposé de quelques principes qui permettent de transformer une fonction d'une variable en une série d'exponentielles dont les exposants sont réciproquement proportionnels aux diverses racines d'une équation transcendante. — Application à divers problèmes relatifs à la propagation de la chaleur et du son.

Inst. : t. VII, p. 463. — *Second Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique.*

Méthode nouvelle pour résoudre les questions du Mémoire précédent, et pour lever certaines difficultés.

Mém. Dét. : Turin, 1831 (80 pages). - **Bull. Fér.** : t. XVI, p. 116. — *Sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites, et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes.*

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 871. — *Sur des formules générales qui se dé-*

duisent du calcul des résidus, et qui paraissent devoir concourir notablement aux progrès de l'analyse infinitésimale.

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 126, 296. — *Rapport sur un Mémoire de M. Oltramare, concernant le calcul des résidus.*

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 1337. — *Sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus, et sur la théorie des intégrales singulières.*

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 1377. — *Sur les fonctions dites complémentaires.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 207. — *Sur l'application du calcul des résidus à plusieurs questions importantes d'analyse.*
Notamment à la convergence des séries.

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 267, 354. — *Application du calcul des résidus à la décomposition des fonctions transcendantes en facteurs simples.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 704. — *Conditions sous lesquelles subsistent les principales formules du calcul des résidus.*

C. R. : 1855, 2e *sem.*, p. 41. — *Considérations nouvelles sur le calcul des résidus.*

C. R. : 1857, 1er *sem.*, p. 406. — *Théorie nouvelle des résidus fondée sur la considération des intégrales prises entre des limites imaginaires, et sur celle des fonctions monodromes et monogènes.*

DIFFÉRENCES FINIES.

Anc. Ex. : t. II, p. 159 (51 pages). — *Sur l'analogie des puissances et des différences.*

Anc. Ex. : t. III, p. 147. — *Sur les différences finies des puissances entières d'une seule variable.*

Anc. Ex. : t. III, p. 149. — *Sur les intégrales aux différences finies des puissances entières d'une seule variable.*

Anc. Ex. : t. III, p. 155. — *Sur les différences finies et sur les intégrales aux différences des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables.*

Éc. Pol. : cah. XXVIII, p. 147. — *Sur diverses formules relatives à la*

théorie des intégrales définies, et sur la conversion des différences finies en intégrales de cette espèce.

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 1183. — *Sur quelques formules relatives aux différences finies.*

C. R. : 1854, 2e *sem.*, p. 214. — *Sur les intégrales aux différences finies.*

CHAPITRE V.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET SUBSTITUTIONS.

SOMMAIRE. — Premières recherches de Cauchy, en 1813. — Détermination du nombre des valeurs des fonctions de plusieurs lettres. — Théorème de M. Bertrand. — Théorie des substitutions. — Ses applications à la théorie générale des équations algébriques.

MÉMOIRES. — *Fonctions symétriques et alternées.* — Leur usage dans la résolution des équations. — *Sur le nombre des valeurs des fonctions.* — Fonctions intransitives, transitives et doublement transitives. — *Théorie des substitutions.* — Propriétés des substitutions. — Substitutions conjuguées. — Applications diverses. — Clefs algébriques. — *Ouvrages à consulter.*

SOMMAIRE.

Les premières recherches de Cauchy sur la théorie des fonctions symétriques et des substitutions se trouvent exposées dans un Mémoire présenté à l'Institut en 1813. L'auteur distingue d'abord parmi les fonctions symétriques celles qui ne changent ni de valeur, ni de signe, quand on permute les lettres, et celles qui changent de signe sans changer de valeur absolue. Les premières sont dites *permanentes*, les secondes *alternées*. L'objet principal du Mémoire est de donner des moyens pour exprimer ces deux genres de fonctions et pour les transformer les unes dans les autres. On en déduit en particulier des formules pour calculer les fonctions symétriques des racines des équations, ainsi que les valeurs générales des inconnues dans les équations du premier degré à plusieurs variables. La même méthode conduit de plus à une nouvelle théorie des fonctions désignées par Laplace sous le

nom de *résultantes;* M. Binet a fait de ces dernières l'objet d'une étude approfondie.

Dans le même travail, Cauchy est amené à traiter en outre une question de la plus haute importance en Analyse : il s'agit de la détermination du nombre des valeurs dont une fonction est susceptible quand on y permute, de toutes les manières possibles, les lettres qu'elle renferme. Ce problème se présente naturellement dans la théorie générale des équations algébriques, où il importe de connaître la limite la plus restreinte du nombre des valeurs que peut acquérir une fonction de n lettres. Le premier théorème sur cette matière est dû à Lagrange; il démontra que le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est nécessairement un diviseur du produit $1.2.3\ldots n$, qui représente le nombre total des permutations. Dans un traité sur la résolution des équations numériques, publié en 1799, le géomètre italien Ruffini fit voir que, si une fonction de cinq lettres admet plus de deux valeurs, elle en admet au moins cinq; et, après lui, Pietro Abatti démontra que, si une fonction de n lettres, n étant plus grand que 4, admet plus de deux valeurs, elle en admet au moins cinq. Cauchy réalisa un progrès considérable dans la question en démontrant d'une manière générale qu'il n'existe aucune fonction de n lettres dont le nombre des valeurs distinctes soit compris entre 2 et le nombre premier immédiatement inférieur ou égal au nombre des lettres. Il donna en même temps des règles pour déterminer les fonctions qui admettent un nombre de valeurs non compris entre les limites précédentes.

Le théorème de Cauchy a été complété plus tard par M. J. Bertrand, dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1845 et inséré dans le trentième cahier du *Journal de*

l'École Polytechnique. M. Bertrand fit voir que, si une fonction de n lettres admet plus de deux valeurs, elle en admet au moins n, quel que soit le nombre n, premier ou non premier, pourvu qu'il soit supérieur à 4. Sa démonstration présentait toutefois une lacune, en ce sens qu'elle s'appuyait sur le postulatum suivant : Si n désigne un nombre entier supérieur à 7, il y a au moins un nombre premier compris entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$. Les tables des nombres premiers, poussées jusqu'à plusieurs millions, avaient permis de vérifier la proposition dans toute l'étendue de ces limites, ce qui équivalait en quelque sorte à une preuve; toutefois le postulatum lui-même a été démontré par M. Tchebichef dans un Mémoire présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1850. Ajoutons enfin que, dans un Mémoire publié en 1849, M. Serret a donné une nouvelle démonstration du théorème de M. Bertrand, sans recourir à cette propriété des nombre premiers.

La recherche du nombre des valeurs dont une fonction est susceptible n'est qu'un cas particulier d'une théorie très-délicate et très-importante par ses applications, dans laquelle on se propose d'étudier d'une manière générale les propriétés des fonctions quand on y permute d'une manière quelconque les lettres qu'elles renferment. Les principes de cette théorie difficile, dite des *substitutions*, ont été établis par Cauchy; nous allons essayer d'en donner une idée sommaire.

Si, après avoir écrit une série de lettres dans un ordre déterminé, on les échange entre elles de toutes les manières possibles, on obtient ce qu'on appelle des *permutations*, et l'on donne le nom de *substitution* à l'opération par laquelle on passe d'une permutation à une autre. Si la substitution consiste à remplacer chaque lettre par la

suivante, on a une *substitution circulaire*. Le produit de deux ou de plusieurs substitutions distinctes est le résultat de la substitution unique qui produirait le même résultat que les substitutions partielles appliquées successivement. Si les substitutions dont on fait le produit sont égales entre elles, les produits se transforment dans les diverses puissances de la substitution proposée. Les substitutions distinctes étant nécessairement en nombre fini, leurs puissances sont donc périodiques et se reproduisent alternativement après des intervalles égaux. On appelle *ordre* d'une substitution le plus petit exposant de la puissance qui reproduit la permutation d'où l'on est parti; et l'on nomme *substitution primitive*, celle dont l'ordre est représenté par un nombre premier ou par une puissance d'un nombre premier. Cette considération des produits et des puissances des substitutions permet d'en établir la classification et ramène immédiatement leur étude aux principes de la théorie des nombres.

La méthode des substitutions constitue une branche importante de l'Analyse et a déjà reçu de nombreuses applications. Elle a servi à établir le calcul des déterminants qui a reçu, dans ces derniers temps, une si grande extension. Abel en a déduit l'impossibilité de résoudre l'équation du cinquième degré au moyen des radicaux, et Galois en a fait le plus heureux usage pour analyser les conditions relatives à la résolution algébrique des équations. Nous ajouterons seulement quelques mots sur l'application que Cauchy en a faite pour déterminer le nombre des valeurs distinctes que peut prendre une fonction de n lettres, quand le nombre de ces valeurs surpasse n. Son analyse repose sur la distinction des fonctions en deux classes : 1° les *fonctions transitives*, qui conservent la même valeur quand on place une lettre à un rang quel-

conque, les autres occupant d'ailleurs un rang convenablement choisi; 2° les *fonctions intransitives*, qui ne jouissent pas de cette propriété. La recherche du nombre des valeurs des fonctions intransitives se ramène d'ailleurs à celle des fonctions transitives. Cauchy a étudié particulièrement les fonctions qui ne renferment pas plus de six lettres et il est parvenu à déterminer les nombres des valeurs dont elles sont susceptibles.

MÉMOIRES.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET ALTERNÉES.

Mém. Dét. : 1813. — *Sur la théorie des fonctions symétriques.*

An. Alg. : ch. III. — *Sur les fonctions symétriques et alternées.*
Usage de ces fonctions pour la résolution des équations du premier degré, à un nombre quelconque d'inconnues.

Nouv. Ex. : t. II, p. 151. — *Sur les fonctions alternées et les sommes alternées.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 160. — *Sur les sommes alternées désignées sous le nom de « résultantes ».*
Propriétés diverses de ces résultantes. — Leur emploi dans la résolution des équations linéaires.

Nouv. Ex. : t. II, p. 177. — *Sur les fonctions différentielles alternées.*

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 178. — *Sur les fonctions alternées et sur diverses formules d'analyse.*
Théorèmes divers concernant la sommation des suites et la théorie des équations binômes.

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 939. — *Note sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées.*

SUR LE NOMBRE DES VALEURS DES FONCTIONS.

Éc. Pol. : cah. XVII, p. 1. — *Sur le nombre des valeurs que peut acquérir une fonction, lorsqu'on y permute, de toutes les manières possibles, les quantités qu'elle renferme.*

Éc. Pol. : cah. XVII, p. 29. — *Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires, par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elle renferme.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 593, 668, 727, 779 (60 pages). — *Sur le nombre des valeurs égales ou inégales que peut acquérir une fonction de n variables indépendantes, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1042. — *Rapport sur un Mémoire de M. J. Bertrand, relatif au nombre des valeurs que peut prendre une fonction, lorsqu'on y permute les lettres qu'elle renferme.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1356. — *Sur le nombre des valeurs que peut prendre une fonction transitive ou intransitive, qui ne renferme pas plus de six variables.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1093. — *Sur les premiers termes de la série des quantités qui sont propres à représenter le nombre des valeurs distinctes d'une fonction de n variables indépendantes.*

THÉORIE DES SUBSTITUTIONS.

Nouv. Ex. : t. III, p. 151 (102 pages). — *Sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données, et sur les permutations ou substitutions, à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre.*

Considérations générales. — Substitutions semblables entre elles. — Sur les diverses formes que peut revêtir une même substitution, et sur le nombre des substitutions semblables à une substitution donnée. — Résolution de l'équation linéaire et symbolique par laquelle se trouvent liées, l'une à l'autre, deux substitutions semblables entre elles. — Sur les facteurs primitifs d'une substitution donnée. — Sur les dérivées d'une ou de plusieurs substitutions, et sur les systèmes de substitutions conjuguées. — Sur les systèmes de substitutions primitives et conjuguées. — Sur les diverses puissances d'une même substitution. — Sur les substitutions permutables entre elles. — Sur les systèmes de substitutions permutables entre eux. — Des substitutions arithmétiques et des substitutions géométriques. — Sur diverses propriétés remarquables des systèmes de substitutions conjuguées.

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 1436. — *Sur les fonctions qui se reproduisent par substitution.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 835, 895, 931, 972, 1025 (57 pages). — *Sur diverses propriétés remarquables des substitutions régulières ou irrégulières, et des systèmes de substitutions conjuguées.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1123. — *Sur la résolution des équations linéaires symboliques, et sur les conséquences remarquables que cette résolution entraîne après elle dans la théorie des permutations.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1188. — *Sur les substitutions permutables entre elles.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1199. — *Note sur la réduction des fonctions transitives aux fonctions intransitives, et sur quelques propriétés remarquables des substitutions qui n'altèrent pas la valeur d'une fonction transitive.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1234. — *Note sur les substitutions qui n'altèrent pas la valeur d'une fonction, et sur la forme régulière que prennent toujours celles d'entre elles qui renferment un moindre nombre de variables.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1238. — *Sur diverses propriétés des systèmes de substitutions, et particulièrement de ceux qui sont permutables entre eux.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1254. — *Note sur les fonctions caractéristiques des substitutions.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1287. — *Sur le nombre et la forme des substitutions qui n'altèrent pas les valeurs d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 1401; 1846, 1er *sem.*, p. 2 (29 pages). — *Sur les fonctions de cinq ou six variables, et spécialement sur celles qui sont doublement transitives.*

C. R. : 1846, 1er *sem.*, p. 53, 99. — *Sur un nouveau calcul qui permet de simplifier et d'étendre la théorie des permutations.*

Sur la formation des fonctions qui offrent un nombre donné de valeurs égales ou de valeurs distinctes. — Applications diverses. — Ce calcul repose sur l'adoption d'une seule lettre caractéristique pour indiquer une substitution, de même qu'on se sert des signes d et δ pour représenter les opérations du calcul des variations.

C. R. : 1846, 1er *sem.*, p. 630. — *Note sur un théorème fondamental relatif à deux systèmes de substitutions conjuguées.*

Nouv. Ex. : t. IV, p. 356 (44 pages). - **C. R.** : 1853, 1er *sem.*, p. 70, 129, 161. — *Mémoire sur les clefs algébriques.*

« Je nomme *clefs algébriques*, dit l'auteur, des variables qui n'apparaissent que passagèrement en des formules où leurs produits sont définitivement remplacés par des quantités qui peuvent être arbitrairement choisies. Ces variables méritent doublement le nom de *clefs*, puisque leur intervention permet, non-seulement d'introduire avec facilité dans le calcul des quantités qui se glissent à leur suite, et auxquelles elles ouvrent la porte, pour ainsi dire, mais encore de résoudre promptement un grand nombre de questions diverses. » — Considérations générales et notations. — Décomposition des sommes alternées, connues sous le nom de *résultantes*, en facteurs symboliques. — Transmutations géométriques et homogènes. — Transmutations et clefs anastrophiques. — Sur les fonctions représentées par des produits symboliques de clefs anastrophiques. — Méthodes diverses pour la détermination des résultantes algébriques. — Usage des clefs anastrophiques dans l'élimination.

C. R. : 1853, 2e *sem.*, p. 36, 57. — *Sur les différentielles et les variations employées comme clefs algébriques.*

Ouvrages à consulter.

Journal de l'École Polytechnique, cah. XXX. — *Recherches de* M. J. Bertrand *sur le nombre des valeurs des fonctions de plusieurs lettres.*

Journal de l'École Polytechnique, cah. XXXII, et *Journal de M. Liouville*, t. XV. — *Recherches de* M. J.-A. Serret *sur le même sujet.*

Cours d'algèbre supérieure, par M. J.-A. Serret, 2e édit., 1866.

Mathieu (Emile), thèse d'Analyse, 1859. — *Sur le nombre des valeurs que peut acquérir une fonction, quand on y permute ses lettres de toutes les manières possibles.*

Jordan (Camille), thèse d'Analyse, 1860. — *Sur le nombre des valeurs des fonctions.*

CHAPITRE VI.

SÉRIES.

SOMMAIRE. — Défauts et lacunes des anciennes théories. — Leibnitz, Euler, Laplace. — Recherches de Cauchy. — Emploi des intégrales définies et des symboles imaginaires pour établir rigoureusement les règles relatives à la convergence des séries.

MÉMOIRES. — *Développements en séries; règles de convergence.* — Sur la convergence des séries et les limites des restes. — Application du calcul des résidus à la théorie des séries. — Étude des séries qui servent à représenter les racines des équations algébriques et les intégrales des équations différentielles. — Sur les divers modes de développement des fonctions en séries. — Méthode logarithmique. — Séries syntagmatiques. — *Série de Lagrange.* — *Séries multiples, prolongées, divergentes.* — *Factorielles.* — Application à la théorie des fonctions elliptiques. — Développement des fonctions en fractions rationnelles. — *Questions diverses.* — Progressions des divers ordres. — Théorèmes relatifs aux sommes d'exponentielles. — *Auteurs et ouvrages à consulter.*

SOMMAIRE.

Les séries étaient déjà connues des anciens, qui les avaient appliquées à la solution de quelques problèmes, mais c'est seulement dans les temps modernes que leur étude a été sérieusement approfondie. La division des polynômes conduit Viète aux séries récurrentes; le calcul des différences finies fait découvrir la série de Stirling, puis celles de Taylor et de Maclaurin; l'analyse des fonctions transcendantes oblige Newton, Leibnitz, Euler et leurs disciples à représenter ces fonctions par des développements en séries; plus près de nous, Lagrange découvre la série célèbre qui porte son nom et dont les applications sont si fréquentes en astronomie. Ajoutons encore que les séries servent de base à la plupart des théories exposées

par Laplace dans la *Mécanique céleste* et dans le *Traité des probabilités*, et que, de nos jours enfin, elles constituent, entre les mains des géomètres, l'un des moyens les plus puissants de recherche.

Cependant, malgré les efforts des savants, la théorie des séries demeurait incomplète et, ce qui est plus grave, manquait même d'une base solide. Faute de soumettre ces formules à des règles rigoureuses et précises, des auteurs éminents sont tombés dans des erreurs palpables. On peut citer comme exemple la suite

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

de laquelle Leibnitz et Euler prétendaient déduire l'égalité :

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - \ldots.$$

Il y a plus : le même développement conduisait à des limites différentes suivant la nature de la fonction qui lui avait servi de point de départ. Enfin, lors même que les résultats étaient exacts, les raisonnements se trouvaient souvent défectueux. Il suffira de rappeler le développement de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment; la valeur de la limite, qu'on désigne ordinairement par la notation e^x, avait déjà été obtenue par Euler, mais par une méthode d'une exactitude très-contestable. Cauchy fit ressortir, le premier, dans son *Cours d'Analyse*, les lacunes de la démonstration d'Euler et la remplaça par une autre qui ne laisse rien à désirer sous le rapport de la rigueur. Il restait en outre à donner l'interprétation du développement quand la variable devient imaginaire. Euler se contentait de le conserver en lui appliquant les règles obtenues pour les valeurs réelles; mais une pareille exten-

sion avait besoin d'être justifiée, et c'est ce que fit Cauchy en montrant la nécessité d'établir préalablement une définition précise de la nouvelle fonction.

La cause principale des erreurs provenait de ce que l'on se servait des séries sans s'inquiéter de la légitimité de leur emploi, et en particulier, sans s'assurer si elles satisfaisaient à la condition essentielle d'être convergentes. Il en résultait, dans les applications, une foule de paradoxes inexpliqués et, au commencement de ce siècle, il régnait encore, dans cette branche de l'Analyse, une extrême confusion. Les travaux de Cauchy y ont au contraire introduit un ordre rigoureux et une exactitude vraiment mathématique.

Il fallait, en premier lieu, établir une distinction importante entre les séries convergentes et les séries divergentes. Les premières seules ont été assujetties à des lois régulières. Les secondes ne doivent pas, sans doute, être proscrites de l'Analyse, elles peuvent aussi être employées comme des expressions symboliques au moyen desquelles on arrive à effectuer des transformations utiles, mais, jusqu'à présent du moins, leur usage est demeuré très-restreint.

Les premières recherches de Cauchy relatives à la convergence des séries ont été exposées dans son cours d'Analyse. Après avoir défini la convergence elle-même, l'auteur étudie d'abord les séries réelles à termes soit positifs, soit négatifs. Il traite ensuite des séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable. Abel avait déjà montré que, si une série de ce genre est convergente pour un certain module de la variable, elle sera également convergente pour toute valeur inférieure du module. Cauchy établit, à son tour, ce théorème et le complète par les propositions suivantes : 1° Si dans une

série les divers termes sont des fonctions continues d'une variable, et si, de plus, la série reste convergente pour des valeurs de la variable comprises entre certaines limites, la fonction qu'elle représente sera aussi continue entre les mêmes limites; 2° Si deux séries ordonnées suivant les puissances d'une variable sont convergentes pour un certain module de cette variable et ont la même valeur pour tout module inférieur, ces deux séries seront identiques; d'où il résulte qu'une fonction ne peut être développée que d'une seule manière suivant les puissances ascendantes de la variable.

L'emploi des symboles imaginaires conduit à des résultats encore plus importants. Dans son cours d'Analyse, Cauchy avait déjà étudié les séries à ce point de vue; une série imaginaire se décompose en deux autres réelles qui doivent être séparément convergentes, et pour cela il suffit que la série réelle des modules le soit elle-même, ce qui ramène la question au cas précédent.

Supposons ensuite qu'il s'agisse du développement d'une fonction suivant les puissances de la variable. Il existe à cet égard une proposition fondamentale qui se trouve énoncée, pour la première fois, dans le Mémoire sur le calcul des limites présenté à l'Académie de Turin en 1831. La règle peut s'énoncer ainsi : « Soit x une variable réelle ou imaginaire; une fonction réelle ou imaginaire de x sera développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module de x conservera une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction cesse d'être finie et continue. » Cauchy était arrivé à ce résultat en partant des principes du calcul des résidus, et en s'appuyant sur les formules qui servent à convertir les fonctions en intégrales définies; plus tard, il en donna une démonstration élémen-

taire, indépendante du calcul intégral et basée uniquement sur les notions du calcul différentiel.

Ce théorème fondamental est du reste susceptible d'une interprétation géométrique simple en faisant usage de ce qu'on appelle le *cercle de convergence*. Considérons la variable imaginaire x comme une quantité géométrique à chacune des valeurs de laquelle correspondra, dans un plan, un point déterminé ; et désignons par R la limite supérieure des modules, c'est-à-dire le plus grand module de x pour lequel les modules des termes de la série restent nécessairement finis. Si, de l'origine comme centre avec un rayon égal à R, on décrit un cercle, ce sera le cercle de convergence, et, d'après ce qui précède, on pourra dire que la série est convergente pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intérieur du cercle de convergence. Pour tous les points extérieurs, elle sera divergente; quant aux points situés sur la circonférence même du cercle, la série pourra être convergente pour quelques-uns, infinie ou indéterminée pour d'autres. Si le rayon limite R devient infini, la série est convergente, sans condition, dans toute l'étendue du plan. D'après ces principes, on verra par exemple que la série :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

est convergente pour tous les points du plan. La série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

sera seulement convergente dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité et divergente pour les points extérieurs. Enfin elle sera encore convergente pour tous les

points de la circonférence, à l'exception de celui qui correspond à l'argument zéro.

On démontre de plus sans difficulté que toute série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de la variable est une fonction continue, monodrome et monogène, c'est-à-dire synectique, dans toute l'étendue du cercle de convergence.

Mais ce qui précède n'est encore qu'une partie des résultats auxquels Cauchy est parvenu. Pour comprendre toute l'étendue et l'importance de sa découverte, il convient surtout de rappeler les recherches sur la théorie des fonctions qui ont fait l'objet d'une suite de Mémoires insérés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, pendant l'année 1846. Bornons-nous, pour le moment, à indiquer sommairement celles qui concernent le développement des fonctions en série et qui reposent sur les propriétés des intégrales définies prises suivant des contours déterminés dans un plan.

Si l'on suppose qu'une fonction $f(x)$ reste synectique dans une certaine région du plan, et si l'on prend son intégrale entre deux points extrêmes, en suivant une courbe située dans cette région du plan, la valeur de l'intégrale sera indépendante du chemin suivi. Il en résulte d'abord que, si une fonction reste synectique dans une région du plan limitée par une courbe fermée, l'intégrale prise en parcourant cette courbe, de manière à revenir au point de départ, sera nulle. En second lieu, si la fonction reste synectique seulement dans une portion du plan comprise entre deux contours fermés, les valeurs de l'intégrale relatives à ces deux contours seront égales. En partant de ces principes on arrive à un théorème très-important dont voici l'énoncé : « Pour qu'une fonction soit développable en une série ordonnée suivant les puissan-

ces entières, positives et croissantes de la variable, et demeure en outre convergente dans un cercle ayant son centre à l'origine, il faut et il suffit que la fonction reste synectique dans toute l'étendue de ce cercle. » M. Laurent a montré que cette proposition pouvait être complétée par la suivante : « Si une fonction reste synectique entre deux cercles concentriques à l'origine, elle sera développable, dans cette région du plan, en une série prolongée dans les deux sens, et ordonnée suivant les puissances positives et négatives de la variable. » La méthode de démonstration donne en même temps le moyen d'effectuer le développement proposé et fait connaître l'expression des coefficients de chaque puissance de la variable sous la forme d'intégrales définies dont la composition est déterminée. Ajoutons enfin qu'on obtient des résultats analogues, soit pour les fonctions de plusieurs variables, soit pour les fonctions implicites définies par des équations.

Les cas où l'on sait obtenir sous forme finie les racines des équations algébriques ou transcendantes, ou bien les intégrales d'un système d'équations différentielles, sont très-rares et doivent être considérés comme des exceptions. On est alors obligé de recourir aux développements en séries, et l'on a un double problème à résoudre : 1° démontrer l'existence de ces racines ou de ces intégrales; 2° établir leurs développements en séries et étudier, par ce moyen, leurs propriétés. Cauchy s'est occupé, à diverses reprises, de cette question difficile, et a enrichi l'Analyse de plusieurs résultats de la plus haute importance dont il sera parlé à l'occasion des équations algébriques ou différentielles. L'une des plus belles conséquences auxquelles il soit parvenu consiste dans une relation singulière qui existe entre les conditions de convergence

de certaines séries et la résolution numérique de certaines équations transcendantes. On en trouve un exemple remarquable dans l'étude du mouvement elliptique. Les séries, dont le problème dépend, cessent d'être convergentes quand l'excentricité ε de la planète acquiert une valeur supérieure au module de la valeur imaginaire de ε qui vérifie l'équation : $1 - \varepsilon \cos\psi = \frac{r}{a}$, ce qui exige que l'excentricité soit inférieure au nombre 0,6627434. Ce résultat avait déjà été obtenu par Laplace, mais sa méthode était applicable seulement au cas particulier qu'il avait en vue, et dans lequel, d'ailleurs, les intégrales s'obtiennent sous forme finie; celle de Cauchy, au contraire, est générale, et convient également, soit à la série de Lagrange, soit à une foule d'autres séries provenant de fonctions qu'on ne sait pas exprimer sous forme finie.

Les séries multiples et les séries divergentes elles-mêmes conduisent aussi à des résultats utiles. Ce serait une erreur de croire que ces dernières, en particulier, doivent être proscrites de l'Analyse. Cauchy a montré en effet que, dans beaucoup de cas, on peut continuer de s'en servir pour obtenir la valeur de certaines quantités avec une approximation, sinon indéfinie, du moins très-grande et ordinairement suffisante. Enfin, dans certaines circonstances, on peut employer les séries multiples ou divergentes pour calculer des quantités inconnues avec une approximation illimitée. Ces remarques trouvent leur application, par exemple, dans la théorie des mouvements planétaires.

Parmi les divers modes de développement des fonctions, citons encore celui qui a pour objet de les représenter, soit par des factorielles, c'est-à-dire, par des produits de

facteurs en nombre fini ou infini, soit par des sommes, en nombre illimité, de fractions simples. Les formules de ce genre ont été appliquées avec avantage à l'étude des lignes trigonométriques et des exponentielles. On les rencontre notamment dans la théorie des fonctions elliptiques, et Jacobi s'en est servi avec habileté pour établir, au moyen de transformations variées, les propriétés essentielles de ces fonctions. Elles ont néanmoins l'inconvénient, inhérent à toutes les méthodes particulières, de ne conduire au but que par des voies détournées, et de ne pas avoir cette généralité et cette fécondité qui caractérisent les méthodes simples et directes. En prenant pour point de départ les principes du calcul des résidus, Cauchy est encore arrivé à des résultats importants dans cette partie de l'Analyse des séries.

MÉMOIRES.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES; RÈGLES DE CONVERGENCE.

Anc. Ex. : t. I, p. 25. — *Sur les séries de Taylor et de Maclaurin.*
Discussion de la forme du reste.

Anc. Ex. : t. II, p. 221. — *Sur la convergence des séries.*
Étude de la série des modules. — Considérations basées sur la théorie des intégrales définies.

Anc. Ex. : t. II, p. 317. — *Méthode pour développer des fonctions d'une ou de plusieurs variables en séries composées de fonctions de même espèce.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 269. - **C. R.** : 1840, 1er *sem.*, p. 640. — *Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence.*

Cauchy avait d'abord étudié les lois de convergence des séries, en se basant sur des considérations empruntées au calcul intégral; dans ce

nouveau Mémoire, il montre qu'on peut leur substituer des démonstrations plus simples, fondées uniquement sur les principes du calcul différentiel. — Développement des fonctions en séries convergentes. — Règles de convergence et limites des restes. — Développement des fonctions implicites. — Formule de Lagrange. — Démonstration élémentaire et rigoureuse de cette formule.

Mém. Dét. : Turin, 1831 et 1832. — *Sur le calcul des résidus et le calcul des limites.*

Nous aurons occasion de revenir sur ces importants Mémoires, qui comprennent les applications du calcul des résidus aux diverses branches des mathématiques. Mentionnons seulement la partie de ce travail qui a pour objet d'établir les règles relatives à la convergence des séries au moyen desquelles on développe les fonctions explicites ou implicites d'une ou de plusieurs variables, et de fixer en outre des limites supérieures aux erreurs que l'on commet quand on arrête chaque série après un nombre donné de termes.

Nouv. Ex. : t. II, p. 41 (70 pages).

Ce Mémoire a pour objet de reproduire plusieurs parties du travail précédent, qui avait été seulement lithographié. — Résumé lu à l'Académie de Turin. — Recherches sur le développement des fonctions en séries.

Inst. : t. VI, p. 603. — *Sur le développement des fonctions en séries périodiques.*

Ce Mémoire concerne diverses séries auxquelles conduisent les problèmes de physique mathématique.

Journ. Liouv. : t. XI, p. 313. — *Sur le développement des fonctions ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables.*

C. R. : 1837, 1er *sem.*, p. 216. — *Lettre à M. Coriolis sur la convergence des séries qui représentent les racines des équations algébriques ou transcendantes, et les intégrales des fonctions différentielles.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 587. — *Sur la convergence des séries.*

Application du théorème fondamental aux fonctions implicites.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 639, 667, 730 (47 pages). — *Sur la convergence et la transformation des séries.*

Extension des théorèmes fondamentaux aux séries qui servent à représenter les racines des équations algébriques ou transcendantes, et les intégrales des équations différentielles. — Application à la *Mécanique céleste.*

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 323. — *Sur le développement des fonctions en séries ordonnées, suivant les puissances des sinus et cosinus.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 842. — *Sur les diverses formes du reste de la série de Taylor.*

La forme assignée par Lagrange est insuffisante dans un grand nombre de cas où les formules de Cauchy réussissent. — *Voir*, sur le même sujet, les recherches plus récentes de M. Ed. Roche et de M. Schlomilch, *Journal de M. Liouville* pour 1858.

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 909; 1843, 2e *sem.*, p. 193. — *Sur le développement des fonctions en séries.*

On démontre qu'on obtient toujours un développement unique, dans le cas même où l'on suppose la fonction développée à la fois suivant les puissances positives et négatives de la variable.

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 370. — *Remarques à l'occasion d'une Note de M. Laurent*, ayant pour titre : « Extrait du théorème de M. Cauchy, relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable. »

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 938. — *Rapport sur un Mémoire de M. Laurent*, ayant pour titre : « Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable. » — Note à l'occasion de ce Rapport.

C. R. : 1843, 2e *sem.*, 1220. - **Nouv. Ex.** : t. III, p. 388 — *Sur les modules des séries.*

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 51. — *Sur la méthode logarithmique appliquée au développement des fonctions en séries.*

Détermination d'une fonction dont le logarithme est représenté par une série ordonnée suivant les puissances entières d'une variable. — Sur le développement des puissances d'une fonction entière du sinus et du cosinus du même angle. — Sur les inégalités périodiques des mouvements planétaires. — Le principe de cette méthode consiste à substituer, au développement direct de la fonction en série, celui de son logarithme; il ne reste plus alors qu'à multiplier ce dernier par l'exposant de la puissance, pour revenir à la fonction proposée. Il en résulte des avantages analogues à ceux que présente l'emploi des logarithmes dans les calculs numériques. Cette méthode est surtout utile en astronomie : appliquée au calcul de la fonction perturbatrice, elle permet de remplacer des séries multiples par des séries simples, qu'il suffit ensuite d'ajouter, au lieu d'avoir à les multiplier.

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 141, 159. — *Sur divers théorèmes relatifs à la convergence des séries.*

Application à l'astronomie.

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 205. — *Sur diverses propriétés remarquables du développement d'une fonction ordonnée en série suivant les puissances entières d'une même variable.*

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 699. — *Sur l'application de la méthode logarithmique au développement des fonctions en séries, et sur les avantages que présente, dans les applications, la détermination numérique des coefficients effectuée à l'aide d'approximations successives.*

C.R. : 1844, 2e *sem.*, p. 1194, 1331. — *Sur plusieurs formules nouvelles, qui sont relatives au développement des fonctions en séries.*

Extension remarquable de ces formules.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 280. — *Sur l'emploi des variables complémentaires dans le développement des fonctions en séries.*

On appelle variables complémentaires deux variables dont la somme est égale à l'unité.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 375. — *Sur diverses propriétés des fonctions continues ou discontinues.*

Dans ce Mémoire, Cauchy définit plus complétement les limites assignées par le théorème fondamental pour la convergence des séries. Au lieu de deux cercles concentriques, ayant pour rayons les valeurs extrêmes des modules, il donne deux courbes caractérisées par des conditions spéciales, et qui comprennent toutes les portions du plan où la série est convergente. Les deux cercles de convergence étaient seulement assujettis à ne pas rencontrer ces deux courbes extrêmes entre lesquelles ils devaient être compris.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 463. — *Sur les séries syntagmatiques, et sur celles qu'on obtient quand on développe les fonctions d'une seule variable suivant les puissances entières de son argument.*

C. R. : 1852, 1er *sem.*, p. 8, 70, 121, 156. — *Sur le développement des fonctions en séries limitées, et sur les restes qui les complètent.*

Application à l'astronomie.

SÉRIE DE LAGRANGE.

Inst. : t. VIII, p. 97 (42 pages). — *Mémoire sur divers points d'Analyse.*

Ce Mémoire concerne particulièrement la série de Lagrange et ses applications. — On n'avait point encore déterminé les conditions générales

de convergence de cette série. Laplace avait seulement résolu la question pour quelques cas restreints qui suffisaient à son objet. — Cauchy montre que les conditions de convergence, pour la série de Lagrange et pour diverses autres qui se déduisent du calcul des résidus, dépendent de la résolution d'une équation transcendante. — La démonstration repose, du reste, sur la considération des intégrales définies imaginaires.

Inst. : t. IX, p. 104. — *Sur quelques séries analogues à celle de Lagrange.*

Sur les fonctions symétriques, etc.

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 490, 493. — *Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie* par M. Félix Chio, de Turin, et ayant pour titre : « Recherches sur la série de Lagrange ». — Note sur les caractères à l'aide desquels on peut distinguer, entre les diverses racines d'une équation algébrique, ou transcendante, celle qui se développe en série convergente par le théorème de Lagrange.

C. R. : 1852, 1er sem., p. 304, 345. — *Rapport sur de nouvelles recherches relatives à la série de Lagrange*, et présentées à l'Académie par M. Félix Chio.

Le Rapport est suivi de trois Notes, par Cauchy.

SÉRIES MULTIPLES, PROLONGÉES, DIVERGENTES.

Rés. Anal. : p. 37. — *Définition et propriétés des séries multiples.*

Règles de leur convergence. — Application à diverses questions. — Nombres de Bernoulli.

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 389. — *Sur la sommation des termes de rang très-élevé dans une série simple ou multiple.*

Nouv. Ex. : t. III, p. 388. — *Sur les modules des séries prolongées dans les deux sens.*

C. R. 1843, 2e *sem.*, p. 370. — *Sur un emploi légitime des séries divergentes.*

C. R. : 1844., 2e *sem.*, p. 1375 et 1433. — *Sur les séries multiples et les séries modulaires.*

Convergence des séries multiples.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 126, 212. — *Sur la convergence de la série partielle qui a pour termes les divers coefficients d'une même puissance d'une seule variable dans une série multiple.*

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 329. — *Sur des formules rigoureuses et dignes*

de remarque, auxquelles on se trouve conduit par la considération des séries multiples et divergentes.

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 162. — *Sur un théorème général qui fournit immédiatement, dans un grand nombre de cas, les limites entre lesquelles une série simple ou multiple demeure convergente.*

FACTORIELLES.

Anc. Ex. : t. IV, p. 174. - **Bull. Fér.** : t. XII, p. 202. - **C. R.** : 1843, 2e *sem.*, p. 572. — *Sur l'application du calcul des résidus au développement des produits composés d'un nombre fini ou infini de facteurs.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 523, 567. — *Sur les fonctions dont plusieurs variables sont liées entre elles par une équation linéaire, et sur diverses transformations de produits composés d'un nombre infini de facteurs.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 640. — *Sur une certaine classe de fonctions transcendantes liées entre elles par un système de formules qui fournissent, comme cas particulier, les développements des fonctions elliptiques en séries.*

Propriétés diverses des factorielles géométriques. — Décomposition en fractions simples d'une fraction qui a pour termes des produits de factorielles.

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 693. — *Sur les factorielles géométriques.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 779. — *Sur les rapports entre les factorielles réciproques dont les bases varient proportionnellement, et sur la transformation des logarithmes de ces rapports en intégrales définies.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 825. — *Sur la réduction des rapports des factorielles réciproques aux fonctions elliptiques.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 921. — *Sur les fractions rationnelles que l'on peut extraire d'une fonction transcendante, et spécialement du rapport entre deux produits de factorielles réciproques.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 1159. — *Sur les formules qui servent à décomposer en fractions rationnelles le rapport entre deux produits de factorielles réciproques.*

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 1069. — *Note sur les propriétés de certaines factorielles, et sur la décomposition des fonctions en facteurs.*

Ces beaux Mémoires de Cauchy sur les factorielles constituent, sous un certain point de vue, une exposition de la théorie des fonctions elliptiques. On n'éprouve, en les lisant, qu'un regret, c'est la nécessité de traduire dans le langage et les notations de l'immortel ouvrage de Jacobi

(*Fundamenta nova Theoriæ Functionum ellipticarum*) les méthodes du grand géomètre, qui, à ce moment, il faut le reconnaître, n'attribuait pas, en Analyse, à la théorie des fonctions elliptiques l'importance qu'il lui reconnut plus tard, en lui consacrant les derniers travaux de sa vie scientifique.

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 162, 186. — *Rapport sur un Mémoire de M. Fédor Thoman*, relatif au développement de l'exponentielle e^x en produit continu. — Ce Rapport est complété par une Note de Cauchy sur la décomposition des fonctions en facteurs.

QUESTIONS DIVERSES.

Anc. Ex. : t. II, p. 277. — *Sur le développement des fonctions d'une seule variable en fractions rationnelles.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 145. — *Sur les diverses suites que l'on peut former avec des termes donnés.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 287. — *Note sur quelques théorèmes relatifs à des sommes d'exponentielles.*

Nouv. Ex. : t. IV, p. 111, 201. - **C. R.** : 1845, 1er *sem.*, p. 2. — *Sur les progressions des divers ordres.* — On désigne, dans certaines théories, sous le nom de *Progression arithmétique*, une série dont le terme général est une fonction algébrique et entière du nombre des termes, et sous le nom de *Progression géométrique*, une série de termes exponentiels dont les exposants forment une progression arithmétique. — Considérations générales. — Sur les modules et sur les conditions de convergence des progressions des divers ordres. — Propriétés remarquables de ces progressions. — Leur étude a conduit à plusieurs résultats importants, et pourrait, à elle seule, constituer une branche de l'Analyse. En particulier, elle a fourni à Jacobi plusieurs belles propriétés des fonctions elliptiques.

C. R. 1842. : 2e *sem.*, p. 411. — *Sur une formule qui sert à développer, suivant les puissances entières d'un accroissement attribué au cosinus d'un arc, les accroissements correspondants que prennent les cosinus des multiples de cet arc.*

C. R. : 1853, 1er *sem.*, p. 454. — *Sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire entre des limites données.*

C. R. : 1856, 2e *sem.*, p. 637. — *Observations sur une Note de M. Catalan* relative à la théorie des séries.

Liste de divers auteurs qui se sont plus particulièrement occupés de la théorie des séries.

Auteurs anciens : Viète, Stirling, Taylor, Maclaurin, Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler.

Auteurs modernes et contemporains : Gauss, Lagrange, Laplace, Fourier, Legendre, Poisson, Binet, Cauchy, Abel, Lejeune-Dirichlet, J. Bertrand, Malmstein, Ernest Lamarle, Bjorling, Lobatto, Guderman, Schlomilch, Catalan, etc.

Ouvrages et Mémoires à consulter.

Un Mémoire de M. J. Bertrand, *Journal de M. Liouville,* t. VII.

Recherches sur la série de Taylor par MM. Ed. Roche et Schlomilch. *Journal de M. Liouville,* t. XIV.

Traité élémentaire des séries, par M. Catalan, 1860.

Théorie des séries, par M. Laurent, 1862.

CHAPITRE VII.

ÉQUATIONS.

SOMMAIRE. — Résumé des recherches antérieures sur la théorie des équations. — Énumération des équations qu'on sait résoudre. — Détermination du nombre et des limites des racines. — Théorème de Sturm. — Théorème de Cauchy.

MÉMOIRES. — *Théorie des équations.* — Sur la résolution des équations algébriques ou transcendantes. — Sur les racines réelles ou imaginaires des équations. — Sur la nature des racines de certaines équations transcendantes. — Méthodes diverses pour la résolution des équations, fondées sur la théorie des intégrales définies, sur celle des quantités géométriques, sur les propriétés des modules des fonctions, etc. — Calcul des indices des fonctions. — Développement des racines des équations en séries convergentes. — *Application du calcul des résidus à la théorie des équations.* — *Équations simultanées.* — *Élimination.* — Résolution numérique de ces équations par la méthode d'interpolation. — Théorie de l'élimination. — *Questions diverses.* — *Ouvrages à consulter.*

SOMMAIRE.

Le problème de la résolution des équations, envisagé dans toute sa généralité, consiste à trouver les valeurs des racines en fonction des coefficients, c'est-à-dire à déterminer des expressions composées avec les coefficients de telle manière qu'en les substituant à la place de l'inconnue dans l'équation, celle-ci soit identiquement satisfaite; mais ce résultat n'a pu être obtenu que dans un très-petit nombre de cas particuliers. La résolution de l'équation du second degré remonte à Diophante, et peut-être à Euclide. Dans le XVIe siècle, Scipion Ferrei, Tartaglia et Cardan trouvèrent la composition des racines pour

l'équation du troisième degré, et Louis Ferrari pour celle du quatrième. Les divers procédés dont on a fait usage pour arriver aux formules finales reposent sur la considération d'une équation auxiliaire que Lagrange appelle *résolvante;* mais, au delà du quatrième degré, la résolvante est d'un degré supérieur à celui de l'équation proposée et ne peut plus servir comme moyen d'abaissement. Relativement à l'équation du cinquième degré, Abel a démontré l'impossibilité de la résoudre par des radicaux, et un géomètre anglais, M. Jerrard, a seulement établi qu'on pouvait, au moyen de transformations préalables, la ramener à la forme réduite : $x^5 - x - a = 0$. Il devenait dès lors nécessaire d'introduire dans la question un élément nouveau et de changer le point de vue du problème; c'est ce que MM. Hermite et Kronecker ont fait, à la même époque, avec un rare succès, en appliquant à l'équation réduite la théorie des fonctions elliptiques (1). La composition des racines ne pouvant être obtenue directement, il restait à examiner s'il ne serait pas du moins possible de les exprimer indirectement au moyen de fonctions auxiliaires convenablement choisies, et qui dépendraient elles-mêmes des coefficients, comme cela arrive pour l'équation du troisième degré, dont on sait que les racines peuvent être représentées par des lignes trigonométriques. MM. Hermite et Kronecker se sont proposé de rechercher si une méthode analogue ne réussirait pas pour l'équation du cinquième degré, et l'on peut voir en particulier, dans le beau Mémoire de M. Hermite sur la théorie des équations modulaires, comment les racines de l'équation ré-

(1) *Voir* dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* année 1858, l'extrait d'une lettre sur ce sujet, adressée à M. Hermite par M. Léopold Kronecker.

duite peuvent toujours être exprimées par un groupe déterminé de fonctions elliptiques. On a donc ainsi une véritable solution analytique d'un problème difficile dont les savants s'étaient vainement occupés depuis si longtemps.

Aux équations précédentes il faut joindre les équations binômes, qui, après les recherches partielles de divers géomètres, ont été complétement résolues par Gauss, ainsi qu'on l'a vu à l'occasion de la théorie des nombres. Mais en dehors de ces équations et de celles qui s'y ramènent au moyen de certaines transformations, le problème de la résolution générale subsiste encore dans toute sa difficulté. L'objet de la théorie des équations se limite alors à rechercher les propriétés communes aux équations des divers degrés et à établir des méthodes régulières et uniformes pour calculer, avec toute l'approximation nécessaire, les racines des équations dont les coefficients sont donnés numériquement. Sous ce rapport, les géomètres sont parvenus à une foule de résultats qui, dans les applications, suppléent convenablement à l'insuffisance de la théorie.

Leur attention s'est surtout portée sur la détermination des caractères au moyen desquels on peut reconnaître l'existence des racines réelles, leur nombre et les limites entre lesquelles elles sont comprises. On trouve déjà, sur ces questions, des règles nombreuses dans les ouvrages de Descartes, de Newton et d'Euler. Dans le célèbre traité de Lagrange on rencontre en particulier une méthode fondée sur la formation de l'équation aux carrés des différences; mais cette méthode, excellente au point de vue théorique, est habituellement impraticable à cause de la longueur des calculs.

Cauchy s'occupa à son tour de cette théorie difficile et

y réalisa des progrès essentiels. Ainsi par exemple, dans son cours d'Analyse, Note III, il montra que, pour séparer les racines réelles d'une équation, il suffisait, dans le cas où les coefficients sont des nombres entiers, d'employer la fonction alternée formée par le produit de toutes les différences des racines prises deux à deux; dès lors il n'est pas nécessaire de former l'équation complète de Lagrange, mais seulement de considérer son dernier terme.

Le problème de la résolution des équations numériques repose sur cette proposition fondamentale que : toute équation algébrique admet au moins une racine réelle ou imaginaire. Gauss avait déjà consacré à traiter ce sujet trois Mémoires différents de la plus haute importance, qui font partie des *Mémoires de la Société royale de Gottingue*. On y remarque avec les idées de Cauchy une liaison évidente. La représentation géométrique des quantités imaginaires, mentionnée plus haut, sert de base à Gauss, et, dans la dernière des trois démonstrations de l'illustre géomètre, la conclusion ressort de la différence des valeurs d'une intégrale double, lorsqu'on intervertit l'ordre des intégrations. C'est ici qu'on voit les deux plus grands analystes de notre époque amenés au même fait et aux mêmes circonstances de calcul, car l'intégrale double de Gauss dépend au fond de l'intégrale simple $\int \frac{f'(r)}{f(r)}\,dr$; mais l'auteur des *Recherches arithmétiques*, se contentant d'une démonstration nouvelle d'un théorème connu, surprenante par sa singularité, laisse à Cauchy, et sans y pénétrer lui-même, le vaste champ de découvertes dont il s'était ouvert l'accès.

Cauchy ne se borna pas à démontrer que le théorème est toujours vrai pour les équations algébriques de degré

quelconque, il assigna encore les conditions sous lesquelles on peut l'étendre aux équations transcendantes; il donna en outre des méthodes très-variées pour la détermination des racines, soit réelles, soit imaginaires. Ces méthodes sont fondées, les unes sur les principes de l'algèbre élémentaire, les autres sur des considérations empruntées au calcul infinitésimal.

Parmi les recherches de Cauchy sur la théorie des équations, on doit surtout remarquer celles qui ont pour objet de préciser le nombre des racines réelles ou imaginaires comprises entre des limites données. Cette question difficile exerçait depuis longtemps la sagacité des plus habiles géomètres; dès la fin du siècle dernier, Fourier, dans ses leçons d'Analyse à l'École Polytechnique, avait exposé une méthode pour déterminer une limite du nombre des racines réelles comprises entre deux nombres donnés, en se servant des dérivées successives. De son côté, Budan fit connaître une autre règle pour la solution du problème, et même l'antériorité de sa découverte a été mise hors de doute, malgré les réclamations de Fourier, par les commissaires nommés par l'Académie des Sciences, qui se sont prononcés formellement à cet égard dans leur Rapport. Enfin, en 1829, M. Sturm réalisa un progrès décisif en publiant une méthode qui assigne, non plus une limite, mais le nombre exact des racines réelles comprises entre deux nombres donnés; de sorte que, pour achever la résolution de l'équation, il ne reste plus qu'à effectuer la séparation des racines par les moyens ordinaires. Cependant la question n'était point épuisée; la solution de M. Sturm, en particulier, ne faisait rien connaître sur les racines imaginaires. Cauchy intervint à son tour et fut assez heureux pour trouver une règle générale qui s'applique à tous les cas et qui déter-

mine d'une manière complète le nombre des racines, soit réelles, soit imaginaires, comprises entre deux limites données. Cette découverte, l'une des plus brillantes qui aient été faites en Analyse, produisit une vive sensation dans le monde savant, et plusieurs géomètres éminents, parmi lesquels on doit citer surtout MM. Sturm et Liouville, s'empressèrent de la reproduire en la présentant sous une forme plus commode et plus conforme aux idées et aux notations en usage. Cauchy lui-même s'occupa plus tard d'en donner une démonstration élémentaire, mais rien n'égale la beauté et la simplicité de sa première méthode. Les propositions relatives aux racines comprises dans un contour fermé se trouvent pour la première fois dans un Mémoire présenté à l'Académie de Turin, en 1831, sur les applications du calcul des résidus et du calcul des limites. La démonstration dont il s'agit est en effet fondée sur les propriétés des résidus, et se déduit, comme conséquence immédiate, d'une formule relative à ce genre de calcul; elle repose donc sur des considérations empruntées à l'Analyse infinitésimale, et, sous ce rapport, on peut dire qu'elle n'est point élémentaire; mais cette Analyse est aujourd'hui assez répandue pour que les notions qui s'y rapportent ne doivent pas être regardées comme appartenant à un ordre exceptionnel de difficultés. Quoi qu'il en soit, c'est là qu'il convient de recourir pour connaître la véritable méthode d'invention de l'auteur et pour contempler, en quelque sorte, la vérité dans sa source.

Parmi les diverses démonstrations du théorème de Cauchy, on doit citer : 1° celle de MM. Sturm et Liouville, *Journal de M. Liouville*, t. I, p. 278; 2° une autre démonstration de M. Sturm, même volume, p. 290; 3° une démonstration de M. l'abbé Moigno, même jour-

nal, t. V, p. 75. Enfin on trouve dans le XXVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique* un long Mémoire ayant pour objet le calcul des indices des fonctions, au moyen duquel Cauchy retrouve directement, et sans recourir au calcul intégral, les résultats qu'il avait déduits précédemment du calcul des résidus et de la théorie des intégrales définies.

Le Mémoire de Cauchy sur le calcul des résidus a paru lithographié en 1831, mais n'a jamais été imprimé dans son entier; on doit le regretter, car il est l'un des plus beaux et des plus importants que l'auteur ait publiés. Il en est résulté que la démonstration originale de Cauchy sur les racines des équations est peu connue, et il ne sera pas inutile d'en indiquer sommairement les traits principaux. Voici d'abord l'énoncé précis du théorème :

« Soit $f(r) = 0$ une équation algébrique à coefficients réels ou imaginaires, dans laquelle on attribue à la variable une valeur de la forme $x + y\sqrt{-1}$; le premier membre se présentera sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q désignant deux fonctions réelles et entières des variables x, y. A chaque système de valeurs de x, y considérées comme des coordonnées, correspondra un point déterminé dans un plan, et on tracera dans ce plan un contour fermé S qui ne passe par aucun des points racines de l'équation. Le rapport $\frac{P}{Q}$ aura, en chaque point du contour, une valeur particulière; mais si l'on parcourt le contour, en partant d'un certain point et en avançant toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, ce rapport pourra devenir nul ou infini suivant que P ou Q seront nuls. Cela posé, soit n le nombre de fois que le rapport $\frac{P}{Q}$ s'évanouit et change de

signe en passant du positif au négatif, et n' le nombre de fois qu'il s'évanouit et change de signe en passant du négatif au positif, le nombre n ne sera jamais inférieur à n', et la différence $n - n'$ sera égale au double du nombre des racines égales ou inégales de l'équation, renfermées dans le contour proposé. »

La démonstration repose sur la proposition suivante relative au calcul des résidus. « Soient x, y deux variables réelles, considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires; $r = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire; $\mathcal{E}\{[f(r)]\}$ le résidu intégral de $f(r)$ étendu à celles des racines de l'équation $\frac{1}{f(r)} = 0$ qui correspondent à des points renfermés dans un contour donné, et c le périmètre de ce contour. La valeur exacte du résidu intégral sera déterminée par l'équation

$$\mathcal{E}\{[f(r)]\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c f(r)\frac{dr}{ds}ds,$$

et le module de ce résidu aura pour limite supérieure le produit de $\frac{1}{2\pi}$ par le périmètre c et par le plus grand des modules de $f(r)$ qui répondent à des points situés sur ce périmètre. » Or, si l'on considère une fraction $\frac{\varphi(r)}{\psi(r)}$ et si l'on désigne par $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines de l'équation $\psi(r) = 0$ comprise entre des limites données, on a

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(r)}{\{[\psi(r)]\}} = \frac{\varphi(r_1)}{\psi'(r_1)} + \frac{\varphi(r_2)}{\psi'(r_2)} + \ldots + \frac{\varphi(r_m)}{\psi'(r_m)}.$$

Si l'on fait

$$\frac{\varphi(r)}{\psi'(r)} = \mathrm{F}(r),$$

il viendra

$$F(r_1)+F(r_2)+\ldots+F(r_m)=\mathfrak{C}\frac{F(r)\,\psi'(r)}{\{[\psi(r)]\}}.$$

Si l'on pose ensuite

$$f(r)=\frac{F(r)\,\psi'(r)}{\psi(r)},$$

l'équation $\psi(r)=0$ sera remplacée par $\frac{1}{f(r)}=0$, et l'on aura

$$F(r_1)+F(r_2)+\ldots+F(r_m)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c f(r)\frac{dr}{ds}\,ds.$$

De plus, le module de cette somme aura pour limite supérieure l'expression

$$\frac{c}{2\pi}\,A\,f(r),$$

dans laquelle A indique le plus grand module que puisse acquérir une fonction de r pour des points situés sur le contour.

On remarquera maintenant que, dans ce qui précède, la fonction $F(r)$ est indépendante de $f(r)$; on pourra donc lui donner telle forme qu'on voudra, pourvu qu'elle reste finie et continue. Si l'on suppose en particulier $F(r)=1$, la somme ci-dessus se réduit à m, nombre des racines comprises dans le contour donné, et l'on a

$$m=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c \frac{\psi'(r)}{\psi(r)}\frac{dr}{ds}\,ds.$$

Le calcul du nombre m se ramène donc à la détermination d'une intégrale définie, et l'on en déduit facilement le théorème en question.

Cauchy suppose encore $F(r) = r$, et il obtient la formule suivante :

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{r\psi'(r)}{\psi(r)} \frac{dr}{ds} ds,$$

qui donne la somme des racines comprises dans un contour donné. On pourrait attribuer à $F(r)$ une infinité d'autres formes et on obtiendrait autant de théorèmes correspondants, dont plusieurs offriraient sans doute de l'intérêt dans les applications; mais ce travail n'a pas encore été fait, et d'ailleurs il est malheureusement à craindre qu'une recherche de ce genre ne demeurât sans résultat, car le succès de l'analyse de Cauchy repose sur la forme logarithmique de l'intégrale $\int \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} dr$, dont les propriétés ne s'étendent pas à l'intégrale plus générale $\int \frac{F(r).\psi'(r)}{\psi(r)} dr$.

MÉMOIRES.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Mém. Dét. : 1813. - **Éc. Pol.** : cah. XVII, p. 457. — *Méthode pour déterminer* à priori *le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives d'une équation de degré quelconque.*

Mém. Dét. : 1817. - **Bull. Phil.** : 1817, p. 3 et 161. - **Éc. Pol.** : cah. XVIII, p. 411. — *Sur les racines imaginaires des équations.*

Mém. Dét. : 1819 et 1828. — *Observations sur les principes de la résolution des équations numériques.*

Mém. Dét. : 1837. — *Sur la résolution générale des équations d'un degré quelconque.*

Mém. Dét. : 1837. — *Sur une méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes.*

Calcul différentiel. — *Note sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou même transcendante.*

Anc. Ex. : t. I, p. 297 (42 pages). — *Sur la nature des racines de quelques équations transcendantes.*

Il s'agit de certaines équations qu'on rencontre fréquemment dans la Physique mathématique; particulièrement dans les théories de la chaleur, des lames élastiques, des plaques vibrantes, etc.

Anc. Ex. : t. IV, p. 65 (64 pages). - **Mém. Dét.** : 1829. — *Sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination.*

Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients réels ou imaginaires. — Équations binômes. — Équations de degré quelconque à coefficients réels ou imaginaires. — Toute équation algébrique admet au moins une racine de la forme $a+b\sqrt{-1}$. — Détermination des fonctions symétriques des racines d'une équation donnée. — Théorème général pour la formation de ces fonctions, et application à l'équation aux carrés des différences. — Détermination des racines réelles d'une équation d'un degré quelconque. — Fixation d'une limite inférieure à la plus petite différence entre les racines réelles. — Théorie de l'élimination. — Degré de l'équation finale.

Nouv. Ex. : t. IV, p. 181. — *Méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques, fondée sur les propriétés des modules des fonctions et sur la théorie des quantités géométriques.*

Inst. : t. IV, p. XXVI. — *Sur la résolution analytique des équations de tous les degrés par le moyen des intégrales définies.*

Éc. Pol. : cah. XXV, p. 176 (54 pages). — *Calcul des indices des fonctions.*

On en déduit une méthode nouvelle pour la résolution des équations. — Théorèmes divers sur les indices. — Théorème de Sturm sur les racines réelles. — Théorèmes relatifs aux racines imaginaires, soit pour une équation à une inconnue, soit pour un système d'équations simultanées.

C. R. : 1837, 1er *sem.*, p. 216. — *Lettre sur la théorie des équations.*

Développement des racines en séries convergentes.

C. R. : 1837, 1er *sem.*, p. 362; 2e *sem.*, p. 301. — *Lettres sur la résolution des équations de degré quelconque.*

C. R. : 1837, 1er *sem.*, p. 773 et 805 (28 pages). — *Lettres sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque.*

C. R. : 1837, 2e *sem.*, p. 357. — *Méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes.*

C. R. : 1837; 2e *sem.*, p. 417. — *Énoncé d'un Mémoire sur la détermination des racines des équations par une méthode dite* linéaire.

C. R. : 1837, 2e *sem.*, p. 587. — *Énoncé d'un Mémoire sur la détermination des racines réelles des équations, au moyen des fonctions interpolaires d'Ampère.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 829. — *Sur la résolution numérique des équations algébriques ou transcendantes.*

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 1104. — *Sur la résolution des équations et sur le développement de leurs racines en séries convergentes.*
Application aux cartes homalographiques.

C. R. : 1857, 1er *sem.*, p. 268. — *Sur la résolution des équations algébriques.*

APPLICATION DU CALCUL DES RÉSIDUS A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Anc. Ex. : t. 1, p. 339. — *Sur l'usage du calcul des résidus pour déterminer la somme des fonctions semblables des racines d'une équation algébrique ou transcendante.*

Mém. Dét. : 1831 (80 pages). — *Sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes.*
Présenté à l'Académie de Turin le 27 novembre 1831, et à l'Académie de Paris, le 8 octobre 1832. — C'est dans ce Mémoire que se trouve pour la première fois la démonstration du théorème relatif au nombre des racines comprises dans un contour donné.

ÉQUATIONS SIMULTANÉES. — ÉLIMINATION.

C. R. : 1837, 1er *sem.*, p. 672. — *Lettre relative à un Mémoire de M. Libri sur les racines des équations simultanées.*

C. R. : 1837, 2e *sem.*, p. 6. — *Note sur un théorème relatif aux racines des équations simultanées.*

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 391. - **Nouv. Ex.** : t. I, p. 385 (38 pages). — *Sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques.*

Appréciation des méthodes de Bezout et d'Euler. — Usage des fonctions symétriques dans la théorie de l'élimination.

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 414. — *Sur les fonctions alternées qui servent à résoudre le problème de l'élimination.*

C. R. : 1846, 1er *sem.*, p. 159 et 193. — *Recherches sur un système d'équations simultanées, dont les unes se déduisent des autres à l'aide d'une ou de plusieurs substitutions.*

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 285. — *Sur l'emploi des racines de l'unité pour la résolution de divers systèmes d'équations linéaires.*

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 536. — *Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées.*

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 650. — *Application des formules que fournit la nouvelle méthode d'interpolation à la résolution d'un système d'équations linéaires approximatives, et en particulier à la correction des éléments de l'orbite d'un astre.*

QUESTIONS DIVERSES.

Anc. Ex. : t. I, p. 233 (27 pages). - **Nouv. Ex.** : t. II. p. 1 (40 pages). — *Sur la résolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers.*

Résolution en nombres entiers des équations homogènes entre deux ou trois variables. — Résolution des équations homogènes du premier, du second et du troisième degré, à trois variables.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 959. — *Rapport sur une machine destinée à la résolution numérique des équations, et présentée à l'Académie par M. Lalanne.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 109 (27 pages). - **C. R.** : 1841, 1er *sem.*, p. 1133. — *Sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable.*

L'objet principal est d'établir que si, en vertu de la variation du paramètre, une racine réelle vient à disparaître, elle sera immédiatement remplacée par des racines imaginaires, et de définir les restrictions auxquelles ce théorème est assujetti.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 102. — *Énoncé d'une Note sur les substitutions qui abaissent le degré d'une équation entre deux variables, et sur l'emploi de ces substitutions dans la théorie des intégrales abéliennes.*

C. R. : 1846, 1er *sem.*, p. 235. — *Sur la résolution des équations symboliques non linéaires.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 407. — *Sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers et sur les polynômes radicaux.*

C. R. : 1853, 1er *sem.*, p. 1114. — *Sur l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré.*

C. R. : 1856, 1er *sem.*, p. 366. — *Sur une formule très-simple et très-générale qui résout immédiatement un grand nombre de problèmes d'Analyse déterminée et d'Analyse indéterminée.*

C. R. : 1857, 1er *sem.*, p. 257. — *Sur l'application des compteurs logarithmiques au dénombrement et à la séparation des racines des équations transcendantes.*

Ouvrages à consulter.

Journal de M. Liouville, t. I. — Diverses démonstrations du théorème sur les racines imaginaires comprises dans un contour donné; par MM. Sturm et Liouville.

Journal de M. Liouville, t. V. — Nouvelle démonstration du même théorème, par M. l'abbé Moigno.

Cours d'Algèbre supérieure, par M. J.-A. Serret; 2e édit., t. I. — Démonstration du même théorème.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES FONCTIONS INVERSES ET PÉRIODIQUES.

SOMMAIRE. — Réflexions générales sur les difficultés que présente la détermination des fonctions inverses. — Nécessité de recourir à la considération des symboles imaginaires. — Mémoire de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. — Série de nouveaux Mémoires en 1846. — Classification des fonctions. — Fonctions monodromes, monogènes, synectiques. — Théorie des fonctions elliptiques. — Recherches de MM. Hermite, Puiseux, Briot et Bouquet.

MÉMOIRES. — *Théorie générale des fonctions.* — Sur les intégrales prises suivant différentes courbes et suivant des contours fermés. — Sur les intégrales imaginaires des équations différentielles. — Sur l'inversion des intégrales. — Sur les diverses espèces d'intégrales des équations différentielles. — Application du calcul des résidus à la théorie des fonctions périodiques inverses. — Sur les compteurs logarithmiques et sur les régulateurs. — *Ouvrages à consulter.*

SOMMAIRE.

On dit généralement qu'une quantité est fonction d'une autre, lorsqu'il existe entre ces deux quantités une relation telle, que pour chaque valeur assignée à la seconde, la première prenne une valeur correspondante parfaitement déterminée. C'est ce qui arrive pour la plupart des fonctions élémentaires, par exemple pour les fonctions algébriques entières et pour les lignes trigonométriques. Cependant une première difficulté se présente lorsqu'on revient de la fonction proposée à la fonction inverse. Si l'on passe du carré à la racine carrée, on obtient pour

celle-ci une valeur double. En trigonométrie, le sinus se définit sans ambiguïté au moyen de l'arc; mais si l'on remonte du sinus à l'arc, on trouve, non plus une valeur simple, mais une expression périodique renfermant une infinité de valeurs. La difficulté augmente encore quand, pour donner à l'analyse toute sa généralité, on fait usage des symboles imaginaires. On est alors conduit à des fonctions qui admettent plusieurs systèmes de valeurs périodiques, et, dans ce cas, ce n'est plus une valeur déterminée qu'il faut considérer, mais une infinité de systèmes, dont chacun comprend lui-même une infinité de valeurs particulières; dès lors la fonction se présente sous une forme vraiment indéterminée, et le sens de la première définition est tout à fait dénaturé. Il en résultait, dans l'étude des fonctions, d'étranges anomalies dont les savants s'étaient vivement préoccupés, sans arriver cependant à vaincre des obstacles qu'ils avaient fini par considérer comme insurmontables. Pour juger de leurs sentiments à cet égard, il suffira de lire un article de M. Eisenstein, de Berlin, inséré dans le *Journal de M. Liouville*, t. X, p. 445, qui montre l'embarras extrême où les difficultés de ce genre jetaient les Géomètres.

Si l'on veut faire d'une manière complète l'analyse des fonctions, il est indispensable de recourir à la considération des symboles imaginaires, dont l'utilité se manifeste déjà pour les fonctions élémentaires. Ainsi, par exemple, en trigonométrie, on peut étudier les propriétés du sinus, de la tangente, etc., au moyen des variables réelles dans le cercle; mais, au point de vue de l'Analyse, cette étude serait tout à fait insuffisante; elle laisserait de côté une foule de propriétés essentielles et ne ferait point connaître les relations intimes qui existent entre les lignes trigonométriques et les exponentielles imaginaires,

relations qui jouent un rôle capital dans un grand nombre de théories.

Dès l'année 1825, les belles recherches de Cauchy sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, avaient montré tout l'avantage qu'on peut retirer des symboles imaginaires pour l'analyse des fonctions; toutefois, à cette époque, il ne s'était point préoccupé de donner à sa méthode l'extension dont elle était susceptible; c'est seulement en 1846 que son attention fut attirée de nouveau sur cette question. On trouvera le résumé de ses recherches dans une série de Mémoires qui font partie du tome XXIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

« On connaît, dit Cauchy, le rôle important que jouent les expressions imaginaires, non-seulement dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes, mais encore dans un grand nombre d'autres problèmes. Ainsi, par exemple, c'est en considérant les valeurs imaginaires d'une variable que l'on parvient à la condition de convergence de la série qui représente le développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable; c'est aussi sur le passage du réel à l'imaginaire que repose, dans le calcul des résidus, l'établissement des formules générales propres à la transformation, ou même à la détermination d'un très-grand nombre d'intégrales définies. Il était donc naturel de penser que, dans la théorie des équations différentielles, des résultats nouveaux et inattendus devraient sortir de la considération directe des intégrales imaginaires, non pas restreinte à quelques cas particuliers déjà traités par les Géomètres, mais étendue à tous les cas possibles. C'est en effet ce qui arrive. Ayant dirigé mes recherches de ce côté, je suis parvenu, non-seulement à porter la lumière dans des

questions délicates qui n'avaient pas été suffisamment éclaircies, mais encore à établir des théorèmes nouveaux, qui, en raison de leur généralité, me paraissent dignes d'attention. »

Un premier point à établir, c'est la définition précise de ce qu'il faut entendre par la valeur, ou plutôt par les valeurs d'une fonction imaginaire. Cauchy étend à ces fonctions les considérations dont il s'est déjà servi pour représenter les symboles imaginaires. Soit

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

une variable imaginaire, et

$$\varphi(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$$

une fonction de cette variable. P et Q pourront être considérés comme les affixes d'un certain point φ dans le plan des coordonnées. Si x, y varient d'une manière continue, le point φ parcourra dans le plan une certaine courbe, et le mouvement de ce point servira à étudier les propriétés de la fonction elle-même. Toutefois, pour que cette étude puisse se faire utilement, il faut que les fonctions P et Q satisfassent à certaines conditions. En particulier, pour que l'analogie se maintienne entre les fonctions réelles et les fonctions imaginaires, il ne suffit pas que la fonction φ soit déterminée pour chaque valeur de la variable, il faut encore qu'il en soit de même de la dérivée. Or cette dérivée dépend en général du coefficient $\frac{dy}{dx}$, qui est, de sa nature, complétement arbitraire; et, si l'on exprime qu'elle en est indépendante, on trouve que les fonctions P et Q doivent satisfaire à une même équation aux dérivées partielles :

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2} = 0.$$

Cette relation fondamentale établit immédiatement l'existence d'une série de propriétés communes aux fonctions imaginaires quelle que soit leur origine, et les sépare de celles qui sont complétement indéterminées.

Voici du reste comment Cauchy classe les fonctions. Si les variations d'une fonction φ sont telles que P et Q varient d'une manière continue, on dit que la fonction est elle-même *continue*. Si le point qui représente la fonction reprend dans le plan la même position, en même temps que le point qui représente la variable, on dit qu'elle est, en outre, *monodrome*. Si, de plus, la dérivée n'admet qu'une valeur en chaque point, on dit encore que la fonction est *monogène*. Une fonction peut être monodrome sans être monogène ou continue, et réciproquement. Si la fonction est à la fois finie, continue, monodrome et monogène, on dit qu'elle est *synectique*. Enfin il convient de remarquer qu'une fonction peut être synectique dans toute l'étendue du plan, ou seulement dans une région limitée. Les nouvelles recherches de Cauchy frappèrent vivement les géomètres et furent, de leur part, l'objet d'une foule de travaux et de commentaires. Nous allons signaler les principaux.

Citons d'abord ceux qui concernent la théorie des fonctions elliptiques. Cette célèbre théorie remonte au siècle dernier; Legendre en fit l'objet d'une étude persévérante pendant près de quarante ans. Cependant son grand *Traité des fonctions elliptiques* est incomplet, en raison surtout de ce que l'auteur ne connaissait pas la propriété essentielle de ces fonctions, qui consiste dans leur double périodicité, l'une réelle, l'autre imaginaire. Gauss paraît être le premier qui ait aperçu cette propriété caractéristique; on trouve, en effet, dans les *Recherches arithmétiques*, un résultat relatif à la division de la lemniscate

qui suffit à lui seul pour montrer que l'auteur était, dès cette époque, en possession du principe de la double périodicité et, sans doute, de la plupart des résultats obtenus postérieurement par Abel et Jacobi. Toutefois Gauss ne publia rien de ses recherches sur cette matière, et c'est seulement vers 1826 qu'Abel établit nettement, et pour la première fois, ce principe fondamental, qui servit de base à ses travaux et à ceux de Jacobi dans son Traité intitulé : *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*. Cauchy reprit à son tour la question, mais de plus haut. Sans s'arrêter exclusivement aux fonctions elliptiques, il s'attacha à définir et à analyser, d'une manière générale, la périodicité multiple des fonctions inverses de diverses classes d'intégrales définies qui comprennent les fonctions elliptiques comme cas particulier.

Le caractère de double périodicité est tellement important, que M. Hermite, en suivant la marche tracée par Jacobi dans ses leçons à l'université de Kœnigsberg, a pu le prendre pour point de départ d'une théorie spéciale des fonctions elliptiques et établir ainsi, d'une manière directe, leurs principales propriétés. Les recherches de ce savant sont exposées dans divers Mémoires insérés aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, et aussi dans les Notes qui accompagnent la nouvelle édition du *Traité de Calcul différentiel et intégral* de Lacroix.

Jacobi et plusieurs autres géomètres avaient établi la théorie des fonctions elliptiques en les mettant sous la forme de développements en séries; dans leur ouvrage sur les fonctions doublement périodiques, MM. Briot et Bouquet ont entrepris d'en donner une nouvelle analyse en les définissant par des équations différentielles dont elles sont les intégrales. C'est en effet sous cette forme que ces fonctions se présentent le plus habituellement

en Analyse, et les méthodes de Cauchy permettent alors d'en étudier plus facilement les propriétés. Dans le même ouvrage, les auteurs se sont encore occupés d'analyser d'autres fonctions définies par diverses équations différentielles. La question étant ainsi abordée directement, on peut, d'après la forme des équations, reconnaître les propriétés des intégrales, leur nature et la catégorie à laquelle elles appartiennent. Enfin la méthode permet d'exprimer ces intégrales, soit au moyen des signes élémentaires lorsque la fonction est algébrique, soit au moyen des fonctions elliptiques.

L'analyse des fonctions algébriques avait été déjà, plusieurs années auparavant, l'objet des travaux de M. Puiseux, qui entra l'un des premiers dans la voie nouvelle frayée par Cauchy. Ce savant s'était proposé plus particulièrement d'étudier les fonctions définies par des équations algébriques. Il a pu ainsi établir d'une manière définitive le mode d'existence des racines de ces équations, en montrant avec évidence ce qui les distingue essentiellement des fonctions rationnelles. L'auteur, appliquant ensuite ces données nouvelles à l'étude des intégrales des différentielles algébriques quelconques, a donné, pour la première fois, les raisons aussi claires que complètes de leurs valeurs multiples, levant ainsi les difficultés signalées par M. Eisenstein, et fondant sur ses véritables bases la théorie des fonctions abéliennes les plus générales. Les recherches de M. Puiseux ont été soumises à l'Académie pendant les années 1849 et 1850; leur publication a eu lieu dans le *Journal de M. Liouville*, pour les années 1850 et 1851.

A tous ces travaux, enfin, il faut joindre ceux de M. Liouville, dont les savantes leçons au Collége de

France, sur les fonctions elliptiques, ont été le point de départ des recherches de MM. Briot et Bouquet.

MÉMOIRES.

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS.

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 251. — *Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 271. — *Sur les fonctions des variables imaginaires.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 321. — *Sur l'application du calcul des résidus à la recherche des propriétés générales des intégrales dont les dérivées renferment des racines algébriques, et en particulier des fonctions elliptiques.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 382. — *Sur le changement de variables dans les transcendantes représentées par des intégrales définies, et sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 537 et 557. — *Sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe d'intégration change brusquement de valeur.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 563. — *Sur les intégrales imaginaires des équations différentielles et sur les grands avantages que l'on peut retirer de la considération de ces intégrales, soit pour établir des formules nouvelles, soit pour éclaircir des difficultés qui n'avaient pas été jusqu'ici complètement résolues.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 617. — *Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles et sur l'inversion de leurs intégrales.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 689. — *Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires.*

« Les théorèmes, dit Cauchy, dont je vais entretenir l'Académie, me paraissent devoir contribuer notablement aux progrès de l'analyse infinitésimale, puisqu'ils permettent d'établir, avec la plus grande facilité,

une foule de propriétés remarquables des transcendantes représentées par des intégrales définies, et, par conséquent, d'une multitude de fonctions parmi lesquelles se trouvent comprises les fonctions elliptiques et les transcendantes abéliennes. »

Dans ses recherches antérieures, Cauchy avait supposé que la fonction sous le signe $\int$ reprenait la même valeur lorsque, après avoir parcouru une courbe entière, on revenait au point de départ. Mais rien n'empêche d'admettre que, dans une telle intégrale, la fonction sous le signe $\int$, assujettie, si l'on veut, à varier avec x par degrés insensibles, acquiert néanmoins des valeurs distinctes, à diverses époques où la valeur de x redevient la même. C'est ce qui arrivera en particulier si la fonction sous le signe $\int$ renferme des racines d'équations algébriques ou transcendantes. Alors, si le point mobile parcourt plusieurs fois de suite la même courbe, les racines comprises dans la fonction dont il s'agit pourront varier avec le nombre des révolutions qui ramèneront le point mobile à sa position primitive; de telle sorte, qu'une racine d'une équation donnée pourra se trouver remplacée, après une révolution accomplie, par une autre racine de la même équation. Par suite, la fonction sous le signe $\int$, que l'on doit supposer complétement déterminée au moment du départ, pourra être remplacée, après une ou plusieurs révolutions, par des fonctions nouvelles. Alors aussi le nombre des révolutions pourra exercer une influence marquée sur la valeur de l'intégrale définie obtenue, et cette intégrale sera généralement elle-même une fonction de la variable x, qui, variant avec x par degrés insensibles, pourra néanmoins, à diverses époques, acquérir diverses valeurs correspondantes à une seule et même valeur de x. Il y a plus, si la courbe que l'on considère est formée d'une infinité de branches qui viennent toutes se couper au même point, et si dans ses révolutions le point mobile parcourt successivement toutes ces branches, les diverses valeurs de l'intégrale correspondantes à une même valeur de x pourront être en nombre infini, et, par suite, si le nombre des révolutions reste indéterminé, la valeur de l'intégrale sera, dans certains cas, complétement indéterminée.

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 702. — *Sur la continuité des fonctions qui représentent les intégrales réelles ou imaginaires d'un système d'équations différentielles.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 729 et 779. — *Sur les diverses espèces d'intégrales d'un système d'équations différentielles.*

Intégrales limitées. — Intégrales rectilignes et curvilignes. — Intégrales complètes. — Sur les rapports et les différences qui existent entre les intégrales rectilignes d'un système d'équations différentielles et les intégrales complètes de ces mêmes équations.

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 68, 126, 162. — *Mémoire sur les fonctions irrationnelles et sur leurs intégrales définies.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 160. — *Sur les fonctions des variables imaginaires.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 276, 493. — *Rapport sur divers Mémoires de M. Puiseux, relatifs à la théorie des fonctions algébriques.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 484. — *Sur les fonctions monotypiques et monogènes.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 442. — *Rapport sur un Mémoire de M. Hermite relatif aux fonctions à double période.*

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 821. — *Rapport sur un Mémoire de M. Marie relatif aux périodes des intégrales.*

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 910. — *Sur la transformation des fonctions implicites en moyennes isotropiques, et sur les développements en séries trigonométriques.*

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 945. — *Formules générales pour la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites.*
Application à l'Astronomie.

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 382. — *Sur la distinction et la représentation des fonctions continues ou discontinues.*

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 445. — *Sur les rapports différentiels des quantités géométriques, et sur les intégrales synectiques des équations différentielles.*

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 651, 713, 804. — *Sur les variations intégrales des fonctions.*

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 511. — *Sur la recherche des intégrales monodromes et monogènes d'un système d'équations différentielles.*

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 376. — *Sur la nature des intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre.*

C. R : 1855, 1er *sem*, p. 878. — *Sur la transformation des fonctions*

implicites en fonctions monodromes et monogènes, et sur les développements de ces fonctions en séries convergentes.

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 1009. — *Sur les compteurs logarithmiques.* Application aux fonctions doublement périodiques.

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 557; 1856, 2e *sem.*, p. 26. — *Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par MM. Briot et Bouquet et intitulé* : « Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles ».

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 787. — *Note relative à un Mémoire de M. Méray sur les fonctions doublement périodiques.*

C. R. : 1856, 1er *sem.*, p. 663. — *Note sur un théorème de M. Puiseux relatif à la théorie des fonctions algébriques.*

C. R. : 1856, 2e *sem.*, p. 13. — *Sur les fonctions monodromes et monogènes.*

C. R. : 1856, 2e *sem.*, p. 69. — *Sur la théorie des fonctions.* Sur les fonctions déterminées par des équations finies. — Sur les fonctions implicites déterminées par des systèmes d'équations différentielles.

C. R. : 1857, 1er *sem.*, p. 849. — *Sur les avantages que présente l'emploi des régulateurs dans l'analyse mathématique.*

Ouvrages à consulter.

Journal de M. Liouville, t. XV et XVI.e — Recherches de M. Puiseux sur les propriétés des fonctions algébriques.

Journal de l'École Polytechnique, cah. XXXVI. — Recherches de MM. Briot et Bouquet sur les fonctions périodiques. — Le même travail a été reproduit dans un volume séparé, intitulé : *Théorie des fonctions doublement périodiques, et en particulier des fonctions elliptiques.*

Thèse d'Analyse, par Ch. Méray, 1858. — Sur les propriétés générales des racines d'équations synectiques.

Thèse d'Analyse, par Camille Jordan, 1860. — Sur les périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algébriques.

Thèse d'Analyse, par H. Berger, 1863. — Étude sur les fonctions des variables imaginaires, d'après Cauchy.

Thèse d'Analyse, par H. Laurent, 1865. — Sur la continuité des fonctions imaginaires, et des séries en particulier.

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

SOMMAIRE. — Usage des séries dans la théorie des équations différentielles. — Théorèmes fondamentaux sur l'existence des intégrales pour tout système d'équations différentielles. — Résumé des recherches de Cauchy sur cette théorie.

MÉMOIRES. — *Théorie générale des équations différentielles.* — Sur les diverses méthodes dont on peut faire usage pour l'intégration des équations différentielles. — Fonctions génératrices de Laplace. — Formules de Fourier. — Application du calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles. — Convergence des séries qui représentent les intégrales. — *Équations différentielles linéaires.* — Équations linéaires à coefficients constants ou variables, avec ou sans second membre. — *Équations aux dérivées partielles.* — Équations différentielles simultanées. — Fonction principale. — Équation caractéristique. — Propriétés et transformations diverses de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène.

SOMMAIRE.

L'intégration des équations différentielles présente des difficultés analogues à celles que l'on rencontre dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes. Le nombre des équations qu'on sait résoudre est très-restreint, et, le plus souvent, on doit se borner à exprimer les racines par des valeurs approchées ou par des développements en séries; de même, il n'y a qu'un très-petit nombre d'équations différentielles qu'on sache intégrer, et, dans les autres cas, on est réduit à chercher quels sont les développements les plus convenables pour représenter approximativement les intégrales.

Une première question à résoudre est celle-ci : à toute équation ou à tout système d'équations différentielles, correspond-il nécessairement une intégrale ou un système d'intégrales? Avant les recherches de Cauchy, cette question était très-obscure; on avait, il est vrai, appliqué la série de Maclaurin aux équations différentielles du premier ordre, renfermant une seule fonction d'une variable indépendante, et l'on en avait déduit l'existence de l'intégrale ainsi que la forme de son développement en série; mais, dans ce cas même, la méthode était insuffisante et sujette à de graves objections. On ignorait si les séries employées étaient convergentes, et d'un autre côté on sait qu'une série, même convergente, ne représente pas toujours la fonction qui lui a donné naissance.

Dans ses leçons à l'École Polytechnique, Cauchy avait déjà donné une méthode rigoureuse pour les équations différentielles du premier ordre, ainsi que pour un système d'équations simultanées du même ordre, quel que fût le nombre des variables; plus tard il revint sur cette question et compléta ses premières recherches dans divers Mémoires, particulièrement dans un Mémoire lithographié à Prague en 1835, et imprimé dans les *Nouveaux Exercices* pour l'année 1840.

Le point de départ de la nouvelle méthode consiste dans la réduction de l'intégration d'un système d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre. L'idée de cette réduction fut suggérée à Cauchy par les recherches de M. Hamilton sur les équations différentielles de la Mécanique, dont l'intégration se ramène, en dernier lieu, à la détermination d'une fonction représentée par une intégrale définie qui satisfait à deux équations du second ordre aux dérivées partielles.

Cauchy appelle *équation caractéristique* l'équation aux dérivées partielles qui peut ainsi remplacer un système d'équations différentielles, et il nomme *intégrales principales* les intégrales générales de ce système représentées par des intégrales particulières de l'équation caractéristique. En faisant ensuite usage des règles relatives au calcul des limites, il parvient, non-seulement à démontrer dans tous les cas l'existence des intégrales, mais encore à donner, sous une forme précise, leurs développements en séries, et à fixer les limites des erreurs commises quand on s'arrête après un certain nombre de termes. « On peut voir, ajoute-t-il, dans le troisième Chapitre du second Livre de la *Mécanique céleste*, avec quelle facilité l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles fournit cinq intégrales générales du mouvement elliptique. On a ainsi, dans l'Astronomie, un premier exemple des avantages que présente la considération de l'équation linéaire, que j'appelle *caractéristique*. La lecture de mon Mémoire suffira, je l'espère, pour montrer tout le fruit qu'on peut retirer de cette considération. Si, d'ailleurs, on songe à la rigueur et à la simplicité des méthodes ci-dessus appliquées à l'intégration par séries des équations linéaires, on se trouvera naturellement amené à cette conclusion, que, dans l'exposition des principes du calcul intégral, l'intégration d'une équation différentielle, ou d'une équation aux dérivées partielles, qui renferme une seule fonction inconnue d'une ou de plusieurs variables, doit précéder l'intégration des équations simultanées qui renferment plusieurs fonctions inconnues, même d'une seule variable, et qu'en outre l'intégration des équations linéaires doit toujours précéder celle des équations non linéaires. »

Il n'est pas sans intérêt de faire ressortir la marche suivie par Cauchy pour l'intégration des équations différentielles. On avait coutume, avant lui, de scinder la question en deux problèmes distincts : l'un, ayant pour but de déterminer d'abord les intégrales générales avec un certain nombre de constantes ou de fonctions arbitraires; l'autre, de calculer les valeurs de ces constantes ou de ces fonctions d'après les valeurs initiales attribuées aux variables principales et à leurs dérivées. L'ordre qu'il suit est inverse, et, en conséquence, il place en premier lieu la recherche, non pas des intégrales générales, mais des intégrales particulières, de sorte que la détermination des constantes ou des fonctions arbitraires ne soit plus séparée de celle des intégrales elles-mêmes. Alors chaque problème devient complétement déterminé, et c'est surtout cette circonstance qui a permis à Cauchy de simplifier à la fois la solution des problèmes déjà traités, et de résoudre des questions qui avaient résisté, jusqu'alors, aux efforts des géomètres.

C'est encore par suite de considérations du même genre que, dans ses recherches sur les intégrales générales des fonctions différentielles qui dépendent d'une seule variable, Cauchy s'était d'abord occupé d'analyser la nature et les propriétés des intégrales définies prises entre des limites données. Cette étude l'avait conduit à la théorie des intégrales définies singulières, simples ou doubles, et à celle des intégrales définies prises entre des limites imaginaires. D'ailleurs l'existence et la nature des intégrales définies étant bien connues, il était facile de passer ensuite aux intégrales générales, c'est-à-dire aux intégrales renfermant une constante arbitraire.

La méthode de Cauchy pour l'intégration des expressions différentielles qui dépendent de plusieurs variables

indépendantes donne lieu à des remarques analogues. La solution très-simple et élégante qu'il a trouvée de ce problème repose en effet sur la substitution, aux intégrales définies, d'intégrales définies prises à partir d'une origine fixe.

Équations linéaires. — La plupart des questions de Physique mathématique conduisent à des équations différentielles linéaires dont, le plus souvent, les coefficients sont constants, au moins si l'on se borne à une première approximation. Dans ces questions, on a ordinairement à considérer quatre variables indépendantes : les trois coordonnées et le temps; mais le nombre des inconnues ou variables principales peut être quelconque, et il faut déterminer les valeurs générales des variables principales quand on connaît, à un certain moment pris pour origine, leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées. Lagrange a donné une méthode pour effectuer l'intégration dans le cas où il n'y a qu'une seule variable indépendante. Au moyen d'une élimination convenable, on commence par ramener le système à une équation différentielle unique qui n'a pas cessé d'être linéaire; puis on exprime la variable principale en fonction de la variable indépendante et d'un certain nombre de constantes arbitraires; enfin on détermine les constantes en fonction des valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées, au moyen d'un système d'équations algébriques du premier degré. Les calculs conduisent, comme on sait, à la résolution d'une certaine équation algébrique, dont le degré est précisément égal à l'ordre de l'équation différentielle proposée. Mais cette méthode, suivant la remarque de Cauchy, présente plusieurs inconvénients sérieux : « 1° Lagrange est forcé lui-même de modifier sa méthode dans le cas où

l'équation auxiliaire offre des racines égales; 2° il est bien dur, pour un géomètre qui veut suivre cette méthode, de se croire obligé à introduire dans le calcul des constantes arbitraires qui doivent être éliminées plus tard et remplacées par les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées; 3° il y a même quelque inconvénient, sous le rapport de la complication des calculs, à commencer par réduire un système d'équations différentielles données à une seule qui renferme une seule variable principale, sauf à revenir, par un calcul inverse, de la valeur générale de cette variable principale aux valeurs de toutes les autres. » La méthode de Cauchy donne, au contraire, le moyen d'exprimer immédiatement les valeurs générales des variables principales qui doivent vérifier un système d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants, en fonction de la variable indépendante et des valeurs initiales des variables principales et de leurs dérivées, sans avoir à établir aucune distinction et à s'occuper séparément du cas où l'équation auxiliaire offre des racines égales.

Dans les *Anciens Exercices*, Cauchy avait déjà montré comment les formules du calcul des résidus conduisent facilement à l'intégration des équations linéaires renfermant une seule variable indépendante et une seule variable principale; par la suite il étendit sa méthode à un système quelconque d'équations différentielles simultanées, linéaires et à coefficients constants; enfin il fit voir que la même méthode s'applique également à un système d'équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants. Ses formules permettent d'exprimer immédiatement, au bout d'un temps quelconque, les variables principales en fonction des variables indépendantes et des racines d'une certaine équation auxiliaire.

Dès lors, dans les problèmes de Physique mathématique, on n'a plus à rechercher séparément les intégrales qui représentent les mouvements du son, de la chaleur et de la lumière, les vibrations des corps élastiques, etc; la question devra être censée résolue dans tous les cas, dès qu'on sera parvenu aux équations différentielles. Dans le cas le plus général, la valeur complète d'une variable principale est représentée par une intégrale sextuple, mais elle se réduira à une intégrale quadruple si l'équation devient homogène, et même à une intégrale double si le premier membre de l'équation caractéristique est décomposable en deux facteurs du second degré. L'un des principaux résultats auxquels on arrive peut s'énoncer ainsi : « Étant donné un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants, entre les coordonnées, le temps et plusieurs variables principales, avec les valeurs initiales de ces variables et de leurs dérivées; on réduit la recherche des valeurs générales des variables principales à l'évaluation d'une intégrale définie sextuple relative à six variables auxiliaires; la fonction sous le signe $\int$ étant proportionnelle à une exponentielle dont l'exposant est une fonction linéaire des variables indépendantes et réciproquement proportionnelle au premier membre de l'équation caractéristique. »

On remarquera encore, avec Cauchy, que la recherche des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles peut se réduire à l'évaluation d'une seule fonction des variables indépendantes, qu'il appelle *fonction principale*. Cette fonction n'est autre chose qu'une intégrale particulière de l'équation unique aux dérivées partielles, à laquelle doit satisfaire

chacune des variables principales, ou même une fonction linéaire quelconque de ces variables. L'équation caractéristique est alors celle qu'on obtient lorsque dans tous les termes de cette équation aux dérivées partielles on efface la lettre employée pour représenter la fonction principale; il en résulte entre les puissances des signes de différentiation une équation dont l'ordre est généralement la somme des nombres qui, dans les équations données, représentent les ordres des dérivées les plus élevées des variables principales, différentiées par rapport au temps. L'ordre de l'équation caractéristique peut, du reste, s'abaisser dans un grand nombre de cas; plusieurs Mémoires de Cauchy sont employés à rechercher les diverses réductions dont elle est susceptible.

MÉMOIRES.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Bull. Phil. : 1818, p. 17. — *Note sur l'intégration d'une classe particulière d'équations différentielles.*

Bull. Phil. : 1822, p. 49. — *Sur le développement des fonctions en séries, et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 327 (57 pages). — *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles.*

Ce Mémoire avait été lithographié en 1835, à un petit nombre d'exemplaires.

Recherches générales sur l'intégration des équations. — L'intégration d'un système d'équations différentielles peut toujours se ramener à l'intégration d'une seule équation aux différences partielles du premier ordre, appelée par Cauchy équation *caractéristique*. — Tout système d'équations différentielles admet généralement un système d'intégrales. — Ap-

plication du calcul des limites pour reconnaître si les séries employées dans l'intégration sont convergentes, et pour fixer des limites supérieures aux erreurs commises en conservant dans chaque série un certain nombre de termes.

Inst. : t. XXII, p. 39 (142 pages). — *Mémoire sur le calcul intégral.*

Calcul des fonctions génératrices de Laplace. — Formule de Fourier et autres de même genre. — Analogie des puissances et des différences. — Intégration des équations différentielles linéaires, à coefficients constants. — Intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. — Sur la détermination des fonctions arbitraires que comportent les intégrales générales des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. — A la suite de ce Mémoire se trouvent diverses Notes concernant la théorie des symboles imaginaires et les quantités géométriques qui servent à les représenter.

C. R. : 1836, 1er *sem.*, p. 85. — *Sur l'intégration des équations différentielles.*

Indication sommaire d'un Mémoire.

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 939; 2e *sem.*, p. 730. — *Sur la convergence des séries qui représentent les intégrales d'un système d'équations différentielles.*

Application à la Mécanique céleste.

C. R. : 1840; 1er *sem.*, p. 957. — *Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles.*

Réduction du système à une seule équation aux différences partielles. — Intégration des équations linéaires aux différences partielles.

C. R. : 1841, 2e *sem.*; 1842, 1er *sem.*, passim. — *Onze Mémoires sur les transformations et les réductions de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène.*

C. R. : 1842, 1er *sem.*, p. 1020; 2e *sem.*, p. 14, 25, 44, 85, 188. — *Sur l'emploi du nouveau calcul, appelé* calcul des limites, *dans l'intégration d'un système d'équations différentielles.*

Applications diverses de ce calcul à l'intégration d'un système d'équations différentielles du premier ordre. — Application au mouvement elliptique des planètes. — Détermination des limites entre lesquelles les séries employées sont convergentes. — Cauchy démontre, par les principes du calcul des limites, qu'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles peut être intégré. — Application de la méthode à l'intégration, par le moyen des séries, d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles. — Intégration des équations auxiliaires.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 138. — *Note sur divers théorèmes relatifs au calcul des limites.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 101 et 141. — *Sur les intégrales des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, et sur le développement de ces intégrales en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'un paramètre que renferment les équations proposées.*

Souvent les développements des intégrales en séries sont très-peu convergents; on peut alors obtenir une plus grande convergence en effectuant les développements suivant les puissances ascendantes d'un paramètre renfermé dans les équations proposées, ou même d'un paramètre introduit arbitrairement auquel on donnera ensuite une valeur déterminée numériquement. — Ce Mémoire concerne surtout l'Astronomie.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 200. — *Sur une loi de réciprocité entre deux systèmes de valeurs de variables assujetties à vérifier des équations différentielles du premier ordre, et sur un théorème relatif à ces équations.*

C. R. : 1846, 2e *sem.* — *Divers Mémoires relatifs à la théorie des fonctions définies par des équations différentielles.*

Voir le chapitre des *fonctions périodiques et inverses.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 485 et 529. — *Sur la détermination complète des variables propres à vérifier un système d'équations différentielles.*

C. R. : 1848, 2e *sem.*, p. 199. — *Note sur l'explication des contradictions qui se manifestent dans plusieurs cas entre les intégrales par séries des équations différentielles, ou aux dérivées partielles, et leurs intégrales en termes finis.*

Examen spécial du cas où les intégrales par séries disparaissent, quoique les intégrales en termes finis continuent de subsister. — Énoncé.

C. R. : 1848, 2e *sem.*, passim. — *Énoncés de divers Mémoires ou Notes concernant l'intégration des équations différentielles.*

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 65, 103. — *Sur l'intégration d'un système quelconque d'équations différentielles, et en particulier de celles qui représentent les mouvements planétaires.*

C. R : 1849, 2e *sem.*, p. 548. — *Sur les intégrales continues et les intégrales discontinues des équations différentielles ou aux dérivées partielles.*

C. R. : 1855, 1er *sem.*, p. 330 et 373. — *Sur les conditions de convergence des séries qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles.*

C. R. : 1856, 2e *sem.*, p. 127 et 497; 1857, 1er *sem.*, p. 528, 595, 805. — *Méthode pour l'intégration des systèmes d'équations différentielles.* — Application aux mouvements planétaires.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

Anc. Ex. : t. I, p. 262. — *Application du calcul des résidus à l'intégration de quelques équations différentielles linéaires à coefficients variables.*

Anc. Ex. : t. II, p. 25. — *Sur la détermination des constantes arbitraires renfermées dans les intégrales des équations différentielles linéaires.*

Anc. Ex. : t. II, p. 210. — *Sur la transformation des fonctions qui représentent les intégrales générales des équations différentielles linéaires.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 53 (40 pages). - **C. R.** : 1839, 1er *sem.*, p. 827, 845, 889, 931. — *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires.*

Équations à coefficients constants et avec second membre. — Équations linéaires simultanées. — Équations linéaires aux dérivées partielles. — Application aux mouvements infiniment petits d'un système de points matériels.

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 637. — *Sur l'évaluation et la réduction de la fonction principale dans les intégrales d'un système d'équations linéaires.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 109. — *Méthode abrégée pour l'intégration des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants.*

Sur la fonction principale qui vérifie une équation linéaire. — Sur les fonctions principales dont les dérivées offrent des valeurs initiales qui dépendent seulement, soit d'une fonction linéaire des variables indépendantes, soit d'une fonction entière, homogène, et du second degré, de ces variables. — Détermination de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique aux dérivées partielles.

C. R. : 1848, 2e *sem.*, p. 163. — *Sur l'intégration générale des équations homogènes, linéaires et à coefficients constants d'un ordre quelconque.*

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Bull. Phil. : 1819, p. 10. - **Nouv. Ex.** : t. II, p. 238 (25 pages). - **Mém. Dét.** : 1823. — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles.*

Recherche de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — Sur une formule de laquelle on déduit à volonté, ou l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, ou une intégrale particulière qui renferme des constantes arbitraires dont le nombre est précisément celui des variables indépendantes.

Bull. Phil. : 1821, p. 101, 145. - **Inst.** : t. IX, p. 97. - **Nouv. Ex.** : t, II, p. 331 (27 pages). - **C. R.** : 1843, 1er *sem.*, p. 469. — *Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, à coefficients constants.*

Propriétés générales des intégrales qui vérifient les équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants. — Propriétés remarquables des équations homogènes et de leurs intégrales. — Transformation remarquable de l'équation aux dérivées partielles, qui représente l'équilibre des températures dans un cylindre de forme quelconque. — Sur une certaine classe d'équations aux dérivées partielles.

Inst. : t. III, p. xi. — *Intégration d'une classe particulière d'équations différentielles, et Mémoire sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre avec un nombre quelconque de variables.*

Bull. Fér. : t. IV, p. 71. — *Intégration des équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients variables.*

Bull. Fér. : t. XIII, p. 273. — *Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 178 (35 pages). — *Sur la transformation et la réduction des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles.*

Fonction principale. — Équation caractéristique. — Intégration des mouvements infiniment petits d'un système isotrope de points matériels.

Éc. Pol. : cah. XIX, p. 510 (82 pages). — *Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants.*

Étant donnée, entre la variable principale φ et les variables indépendantes $x, y, z, \ldots, t$, une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants, avec un dernier terme fonction des variables indépendantes, intégrer cette équation de manière que les quantités φ, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \ldots$ se réduisent à des fonctions connues de $x, y, z, \ldots$ pour $t = 0$. — La solution de ce problème est fondée sur l'emploi des formules qui servent à exprimer une fonction au moyen d'intégrales définies. — Application de la méthode à l'intégration des équations linéaires aux dérivées

partielles et à coefficients constants. — Dans une Note, Cauchy examine diverses formules utiles pour la détermination des intégrales définies, et qui reposent sur la considération des intégrales définies singulières.

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 288. — *Sur la réduction des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux différences partielles.*

Éc. Pol. : cah. XX, p. 297. — *Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles, et sur les phénomènes dont cette équation fait connaître les lois dans la Physique mathématique.*

Ce Mémoire concerne en particulier la propagation des ondes dans les gaz, les liquides ou les solides.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 1. — *Sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 1. — *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles, et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique.*

Formules générales qui servent à décomposer un état initial des mouvements vibratoires en ondes d'une forme donnée. — Examen des ondes sphériques ou ellipsoïdales.

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 46. — *Sur l'intégration des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles.*

C. R. : 1842, 1er *sem.*, p. 395. — *Intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients constants, avec un dernier terme fonction des variables indépendantes.*

A l'occasion d'un Mémoire de M. Blanchet sur la théorie de la lumière.

C. R. : 1842, 1er *sem.*, p. 740. — *Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R. : 1842, 1er *sem.*, p. 769 et 881. — *Sur une intégrale remarquable d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

C. R. : 1842, 1er *sem.*, p. 894, 952, 1026. — *Remarques diverses sur l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.*

Sur certaines solutions complètes de ces équations.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 131. — *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre.*

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 484. — *Sur l'intégration par séries des*

équations linéaires aux dérivées partielles, et sur l'usage des intégrales singulières dans cette intégration.

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 572. — *Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles, et sur l'emploi de ces intégrales dans les questions de Physique mathématique.*

Intégration de ces équations sous des conditions données. — Sur une transformation remarquable des équations homogènes et de quelques autres. — Intégration d'une équation linéaire du second ordre qui représente l'équilibre de la chaleur. — Sur les intégrales particulières de cette équation qui peuvent s'exprimer en termes finis.

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 641, 689. - **Inst.** : t. XXII, p. 587. — *Sur les systèmes d'équations linéaires différentielles, ou aux dérivées partielles, à coefficients périodiques, et sur les intégrales élémentaires de ces mêmes équations.*

CHAPITRE X.

MÉCANIQUE.

SOMMAIRE. — Considérations générales sur la constitution des corps. — Réduction des forces de la nature à l'unité. — Élasticité. — Rôle de l'éther. — Équations générales des mouvements moléculaires. — Travaux de Navier, Poisson, Cauchy. — Réduction des équations à la forme linéaire. — Intégration de ces équations. — Mouvements infiniment petits. — Mouvements simples. — Mouvements par ondes planes. — Conditions relatives aux limites des corps. — Application à divers problèmes de Mécanique.

MÉMOIRES. — *Principes généraux de la Mécanique.* — Corps solides. — Moments d'inertie. — Forces vives. — Choc des corps. — *Tiges et plaques élastiques.* — *Équilibre et mouvement des systèmes.* — Sur les systèmes simples ou doubles de points matériels qui s'attirent ou se repoussent à de petites distances. — *Pressions, tensions, condensations, dilatations.* — Sur les pressions, les tensions, les condensations et les dilatations qui se produisent dans les systèmes de molécules. — *Conditions relatives aux limites des corps.* — Application à la recherche des équations de conditions relatives aux surfaces de séparation des milieux. — *Questions diverses.* — *Rapports.*

SOMMAIRE.

Les corps doivent être considérés comme des assemblages de molécules douées des forces d'attraction et de répulsion mutuelles qui se font équilibre à l'état de repos. Dans les fluides, les molécules peuvent se déplacer librement en tous sens; dans les solides, au contraire, elles occupent des positions déterminées, ce qui avait d'abord donné lieu à traiter ceux-ci comme des systèmes de figure invariable. Mais, en réalité, tous les corps, même ceux qu'on appelle *solides*, sont sujets à des déformations

continuelles. Sous l'influence des forces extérieures, un nouvel état d'équilibre s'établit; les molécules, après avoir été écartées de leur position primitive, tendent incessamment à y revenir en exécutant une série de vibrations infiniment petites. De là naissent des tensions ou des pressions, des condensations ou des dilatations, dont l'étude sert de base à la théorie de l'élasticité, l'une des plus importantes de la Mécanique. La stabilité des constructions, le fonctionnement régulier et permanent des machines, la production du son, la propagation de la chaleur et de la lumière sont autant de questions qui s'y rattachent directement. Ajoutons encore qu'une foule d'autres phénomènes dont l'origine n'est pas encore bien connue, tels que ceux de l'électricité, du magnétisme, peut-être aussi de la pesanteur universelle, sont liés, suivant toute apparence, d'une manière intime à cette propriété générale de la matière. Les progrès récents des sciences tendent de plus en plus à confirmer ces prévisions, et à ramener la Mécanique tout entière à l'étude d'une force unique dont l'élasticité serait la principale manifestation.

A côté de la matière pondérable vient se placer l'éther, fluide d'une ténuité extrême et d'une élasticité parfaite, qui remplit tout l'univers. L'existence de l'éther dans les espaces célestes était déjà établie par la propagation des ondes lumineuses à travers le vide sidéral; le passage de la lumière à travers les corps diaphanes et le phénomène de la double réfraction ont ensuite démontré que l'éther existe dans tous les corps, où il constitue autour de chaque molécule une sorte d'atmosphère plus ou moins dense au milieu de laquelle nagent les particules matérielles.

Telles sont les idées universellement admises aujour-

d'lui sur la constitution intime de la matière. Les beaux travaux de Fresnel en optique avaient d'abord tranché définitivement l'ancien débat entre les deux théories de l'émission et des ondulations; mais, ayant en vue un but particulier, il ne s'était pas préoccupé des conséquences qui pouvaient découler de ses principes pour la Mécanique générale. Navier est le premier qui ait entrepris d'analyser les lois élémentaires de l'équilibre et du mouvement des systèmes; ses recherches ont fait l'objet de plusieurs Mémoires publiés en 1831 : on y trouve enfin les équations différentielles du problème. Parmi les divers géomètres qui s'occupèrent de la même question, vers cette époque, on doit citer surtout Lagrange, Poisson et Cauchy. Ce dernier s'appliqua principalement à généraliser la solution et à la rendre indépendante des diverses conditions particulières auxquelles on s'était d'abord assujetti. Ainsi, par exemple, l'un des inconvénients les plus graves des méthodes suivies avant lui provenait de l'hypothèse qu'on faisait sur la continuité de la matière, hypothèse qui paraissait nécessaire pour ramener les calculs à des intégrations. Mais une pareille supposition est tout à fait inadmissible; non-seulement la matière n'est pas continue dans les corps, mais certains phénomènes permettent d'affirmer que les diverses molécules sont séparées les unes des autres par des espaces extrêmement considérables relativement à leurs propres dimensions. Les efforts de Poisson, pour lever cette difficulté, avaient été infructueux : Cauchy fut plus heureux. Au principe de la continuité de la matière, il substitua la notion incontestable de la continuité des déplacements géométriques; d'ailleurs les couples de molécules qui réagissent mutuellement restent complétement indéterminés, leur nombre et leurs dimensions

peuvent varier d'un milieu à un autre, et, par suite, leurs distances réciproques sont tout à fait arbitraires; les résultats de la théorie en demeurent indépendants. Il y a plus : Cauchy avait d'abord considéré les corps comme des systèmes de points matériels simples, et cette hypothèse lui avait suffi pour expliquer la plupart des phénomènes; toutefois il en est d'autres pour lesquels il convient d'étendre ce point de vue et de regarder les molécules élémentaires comme étant elles-mêmes composées d'atomes groupés de diverses manières, ce qui est conforme à la réalité. Les formules générales de Cauchy s'adaptent également à un système de cette nature.

Enfin, il ne suffit pas toujours de soumettre au calcul un système unique de molécules, même composées; par ce moyen, on explique bien un certain ensemble de phénomènes : le son, l'élasticité, les vibrations des tiges et des membranes, etc; mais on est obligé de recourir à des considérations d'un ordre plus élevé pour interpréter des phénomènes d'un autre genre, particulièrement ceux qui se présentent en optique, lorsque la lumière traverse des corps diaphanes. L'éther est le milieu qui produit et propage les vibrations lumineuses, et, dans le vide sidéral, il se comporte comme un milieu isotrope, c'est-à-dire comme un milieu dans lequel les mouvements se transmettent de la même manière en tous sens; mais dans les corps sa constitution est différente. L'éther agit sur les molécules de matière pondérable; celles-ci réagissent à leur tour sur les molécules éthérées, les attirent, les groupent suivant des lois toutes nouvelles et modifient profondément la nature de leurs mouvements. Pour obtenir une théorie complète de la lumière, il faut donc poser autrement le problème, et analyser d'une manière générale les mouvements qui peuvent coexister dans un

double système de molécules qui se pénètrent mutuellement.

Lorsqu'un système vient à être dérangé de sa position naturelle d'équilibre par des forces quelconques, intérieures ou extérieures, il en résulte des déformations et des changements de densité et de pression dont l'étude offrait de grandes difficultés. Diverses tentatives avaient déjà été faites pour les lever; Poisson, par exemple, dans sa théorie mathématique de l'action capillaire, avait introduit avec succès la notion du changement de densité près de la surface des corps; mais, malgré des efforts partiels, les difficultés subsistaient encore dans leur ensemble. Plusieurs des principes admis étaient même défectueux. Ainsi, en ce qui concerne les pressions exercées à l'intérieur des corps, on supposait qu'elles étaient dirigées normalement aux éléments des surfaces pressées, et que, de plus, elles étaient les mêmes en tous sens autour d'un point. Mais cette hypothèse est rarement admissible, et il était important d'établir les équations générales de l'équilibre et du mouvement sans y avoir recours. C'est ce que fit Cauchy dans une série de Mémoires où il étudie les lois de variation des pressions et des tensions, des condensations et des dilatations dans les systèmes. Ses recherches sur cette matière l'ont conduit à une foule de résultats remarquables parmi lesquels on doit noter la vérification des lois de Fresnel relativement au phénomène de la double réfraction.

L'établissement des équations générales exige qu'on sache exprimer l'équilibre des forces appliquées à un élément quelconque de masse pris dans les corps. La forme de cet élément peut, du reste, être choisie arbitrairement; la figure du parallélipipède est la plus simple et se présente naturellement; aussi est-elle habituelle-

ment employée ainsi que celle du cylindre, du prisme et de la sphère. Cauchy y joint les conditions d'équilibre relatives à un élément tétraédrique, ce qui permet d'étudier plus facilement les phénomènes qui se passent dans le voisinage de la surface des corps. Cette dernière forme conduit à divers résultats qu'il serait difficile d'obtenir d'une autre manière et a été adoptée, depuis Cauchy, par plusieurs savants.

Signalons encore une autre difficulté. Pour qu'un problème de Mécanique puisse être résolu, il ne suffit pas de définir exactement la constitution des systèmes et les conditions variées auxquelles ils sont assujettis; il faut encore connaître la nature et les lois des forces qui sollicitent chaque point matériel. Ainsi, les mouvements des corps pesants n'ont pu être calculés qu'après que Galilée eut établi les lois de la pesanteur, et, d'un autre côté, les découvertes de Képler et de Newton sur la gravitation universelle étaient la condition nécessaire des progrès modernes de l'Astronomie. On pouvait donc supposer que, pour entreprendre l'étude de la Mécanique moléculaire, il était également indispensable de trouver d'abord les lois des forces intérieures en vertu desquelles les molécules s'attirent ou se repoussent. Mais la détermination *à priori* de ces lois paraît extrêmement difficile, et aujourd'hui encore, on sait très-peu de chose à ce sujet. Heureusement cette connaissance n'est pas indispensable : les mouvements moléculaires des corps sont de l'ordre des infiniment petits, et, pour les analyser, il suffit de savoir — ce qui est un fait d'expérience — que les actions élémentaires s'exercent à des distances insensibles et s'évanouissent aussitôt que la distance devient appréciable. Cette circonstance permet de ramener immédiatement les équations à la forme li-

néaire, et on en déduit l'explication des phénomènes sans avoir besoin de faire aucune autre hypothèse sur les lois de variation des forces avec les distances. La discussion comparative des expériences avec les formules conduira au contraire, dans certains cas, à des conséquences imprévues, ou, au moins, à des aperçus utiles sur la nature même des forces. Pour n'en citer qu'un exemple, nous dirons que le fait de la non-dispersion de la lumière dans le vide a permis à Cauchy de conclure que les molecules d'éther se repoussent en raison inverse du bicarré de la distance.

Mouvements infiniment petits. — L'étude de la Mécanique moléculaire se ramène donc à l'analyse des mouvements infiniment petits des systèmes simples ou doubles de points matériels, et voici à cet égard quelques-uns des principaux résultats auxquels Cauchy est parvenu.

Les mouvements dont il s'agit se représentent par des équations dans lesquelles entrent trois variables imaginaires, respectivement égales aux produits de trois constantes imaginaires par une même exponentielle dont l'exposant imaginaire est une fonction linéaire des coordonnées et du temps. Ces trois variables imaginaires mesurent ce que Cauchy appelle les *déplacements symboliques* de chaque molécule, tandis que les parties réelles de ces mêmes variables représentent les *mouvements simples* du système. On en déduit que tout mouvement simple est un mouvement par ondes planes, les diverses molécules se mouvant dans des plans qui sont parallèles entre eux, sans être nécessairement parallèles aux plans des ondes. On remarquera ensuite que l'exponentielle variable à laquelle les déplacements symboliques sont proportion-

nels est le produit d'un facteur réel par une exponentielle trigonométrique; ce facteur sera le *module* du mouvement simple dont l'exponentielle trigonométrique sera l'*argument*. Cela posé, si le module est indépendant du temps, le mouvement simple sera durable et persistant, et chaque molécule décrira une ellipse, qui peut se réduire à un cercle ou à une portion de droite, ce qui correspond à divers modes de polarisation. Si, de plus, le module est égal à l'unité, le mouvement correspondant se propagera sans s'éteindre, et les ellipses décrites seront toutes parallèles les unes aux autres. Si, au contraire, le module est différent de l'unité et ne se réduit à l'unité que pour des points situés dans un certain plan, alors l'amplitude d'une vibration moléculaire, mesurée par le grand axe de l'ellipse décrite, décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance de la molécule au plan croîtra en progression arithmétique. Ces notions générales, applicables à tous les mouvements simples, serviront un peu plus loin, en optique, à caractériser les rayons désignés par Cauchy sous le nom de *rayons évanescents*.

Conditions relatives aux limites des corps. — La solution d'un grand nombre de questions de Physique mathématique dépend des équations de condition relatives aux limites des corps; telles sont : les vibrations des plaques élastiques, la transmission du son d'un milieu dans un autre, la réflexion et la réfraction de la lumière à la surface des corps. Dans ces divers cas, du reste, il suffit de considérer les mouvements infiniment petits représentés par des équations aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants. De plus, tout mouvement vibratoire de cette nature, propagé dans un milieu homogène,

se réduit à des mouvements simples par ondes planes, ou bien résulte de la superposition d'un nombre fini ou infini de mouvements simples. La question se trouve donc ramenée à la recherche des lois suivant lesquelles un mouvement simple est modifié en passant d'un milieu dans un autre.

La recherche de ces lois avait inutilement occupé les géomètres, et la plupart de leurs résultats reposaient sur des hypothèses contestables. Dans divers Mémoires publiés en 1839 et 1840, Cauchy fit connaître les véritables principes de la solution. A cet effet, il analysa les variations de pression qui se produisent vers la surface de séparation des corps, en se servant d'un élément cylindrique dont l'une des bases est prise dans le premier milieu, et l'autre dans le second, la hauteur de ce cylindre étant très-petite, mais cependant supérieure au rayon de la sphère d'activité des molécules. Le calcul indique alors deux sortes de modifications distinctes. Il en est qui n'altèrent pas la vitesse de propagation, de sorte que les mouvements demeurent isochrones et correspondants; la considération de ces mouvements suffit, par exemple, en optique, pour établir les lois connues de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Il en est d'autres qui influent sur la direction et les amplitudes des vibrations; on en déduit les lois de la polarisation et les variations d'intensité de la lumière réfléchie ou réfractée. On commence par exprimer que chaque élément de la surface de séparation est en équilibre sous l'action des pressions intérieure et extérieure, ce qui donne immédiatement trois équations de condition. Ces équations seront suffisantes si chacun des deux milieux ne renferme qu'un seul système de molécules, et c'est le cas de la théorie du son ou des corps élastiques;

mais, en optique, les mouvements se propagent dans un double système composé des molécules matérielles et de l'éther, et il faut recourir à un second principe que Cauchy appelle le *principe de continuité*. Il consiste à admettre que les molécules d'éther, intérieures ou extérieures, forment un système unique et continu, et que les déplacements moléculaires, ainsi que leurs dérivées partielles, varient par degrés insensibles quand on passe d'un milieu à l'autre. Ce principe, joint à celui de l'equilibre des pressions, fournit tous les éléments nécessaires pour étudier la nature et les propriétés diverses des rayons réfléchis ou réfractés.

Questions diverses. — Le premier travail de Cauchy sur la Mécanique concerne la théorie des ondes et fut composé en 1815, à l'occasion d'un concours ouvert par l'Académie pour le grand prix de mathématiques. La question était proposée dans les termes suivants : « Une masse fluide pesante, primitivement en repos, a été mise en mouvement par l'effet d'une cause donnée ; on demande, au bout d'un temps déterminé, la forme de la surface extérieure du fluide et la vitesse de chacune des molécules situées à cette même surface. » Dans un Mémoire qui remporta le prix, Cauchy résolut complétement le problème, et, de plus, généralisa la solution en étudiant, non-seulement l'état de la surface extérieure, mais encore celui de la masse entière du fluide. Son travail est divisé en trois parties. Il détermine d'abord l'état initial du fluide quand on connaît, à l'origine, la forme de la surface extérieure et les forces qui agissent sur elle ; il établit ensuite les équations qui définissent, à un moment quelconque, l'état de la masse et celui de la surface libre ; enfin il examine les conséquences qui résultent de

ces équations et calcule les valeurs numériques des constantes que renferment les formules employées.

La discussion du mouvement des ondes exigeait l'étude préliminaire de plusieurs points d'Analyse relatifs à la théorie des intégrales définies et à leurs développements en séries. Ces questions accessoires ne pouvaient être introduites sans inconvénient dans le corps même du Mémoire; elles se trouvent exposées dans une série de vingt Notes placées en appendice. Quelques-unes accompagnaient le travail primitif; les autres ont été ajoutées à l'époque de l'impression, en 1825.

Parmi les problèmes de Mécanique dont Cauchy s'est le plus occupé se trouve encore la théorie de l'équilibre et du mouvement des tiges et des plaques élastiques, qui a fait l'objet de divers Mémoires insérés dans les *Anciens Exercices*. Plusieurs savants avaient déjà traité cette question, et l'on doit citer notamment les recherches d'Euler, dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg* pour 1779; celles de Poisson, dans le t. VIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences;* et enfin celles de Mlle Sophie Germain, dans un Mémoire couronné par l'Institut en 1815. Cauchy ajouta beaucoup aux recherches de ses devanciers, donna une explication nouvelle des faits déjà connus et en découvrit d'autres que l'expérience a ensuite vérifiés. Il convient de consulter à ce sujet les belles recherches expérimentales de Savart, dont les résultats sont exposés dans les *Annales de Chimie et de Physique*.

MÉMOIRES.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE.

Anc. Ex. : t. I, p. 29. — *Sur la résultante et les projections de plusieurs forces appliquées à un seul point.*

Démonstration nouvelle de la règle du parallélogramme des forces, dégagée des considérations étrangères sur lesquelles on avait l'habitude de s'appuyer. — Propriétés des projections des forces sur un plan ou sur un axe.

Anc. Ex. : t. I, p. 66 et 117. - **C. R.** : 1853, 1er *sem.*, p. 73. — *Sur la théorie des moments linéaires des forces appliquées à divers points.*

Moments linéaires des divers ordres. — Cette théorie se rattache à celle des moments algébriques des forces et à la théorie géométrique des couples de M. Poinsot.

Anc. Ex. : t. I, p. 125 et 155. — *Usage des moments linéaires dans la recherche des équations d'équilibre d'un système entièrement libre dans l'espace, ou assujetti à certaines conditions.*

Anc. Ex. : t. I, p. 151. — *Sur les conditions d'équivalence de deux systèmes de forces appliquées à des points liés invariablement les uns aux autres.*

Anc. Ex. : t. II, p. 23. — *De la pression dans les fluides.*

Démonstration directe du principe de l'égalité de pression en tous sens.

Anc. Ex. : t. II, p. 70. — *Sur les mouvements que peut prendre un système invariable, libre ou assujetti à certaines conditions.*

Sur le mouvement d'un système de points matériels qui, étant liés invariablement les uns aux autres et compris dans un plan fixe, se meuvent sans sortir de ce plan. — Sur le mouvement d'un système de points matériels placés arbitrairement dans l'espace et liés invariablement les uns aux autres.

Anc. Ex. : t. II, p. 93. — *Sur les moments d'inertie.*

Ellipsoïde d'inertie. — Propriétés des axes principaux. — Calcul des moments d'inertie pour le parallélipipède rectangle et pour l'ellipsoïde.

Inst. : t. IX, p. 111. — *Sur l'équation qui a pour racines les mo-*

ments principaux d'inertie d'un corps solide, et sur diverses équations du même genre.

Anc. Ex. : t. II, p. 104. — *Sur la force vive d'un corps solide ou d'un système invariable en mouvement.*

Bull. Phil. : 1826, p. 180. — *Sur le choc des corps élastiques.*

Bull. Fér. : t. XII, p. 116 et 121. — *Sur le principe des forces vives.*

Mém. Dét. : 1829. — *Sur un nouveau principe de mécanique.*

Ce principe, qui concerne les variations des forces vives dans les chocs, s'énonce ainsi : « Lorsque, dans un système de points matériels, les vitesses varient brusquement en vertu d'actions moléculaires développées par les chocs de quelques parties du système, la somme des moments virtuels des quantités de mouvement acquises ou perdues pendant le choc est nulle toutes les fois que l'on considère un mouvement virtuel dans lequel les vitesses de deux molécules qui réagissent l'une sur l'autre sont égales entre elles. »

Anc. Ex. : t. III, p. 128. - **Bull. Fér.** : t. XIII, p. 169. — *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement des fluides.*

Liquides ou fluides incompressibles. — Fluides élastiques. — Mouvement de la chaleur.

Mém. Dét. : 1829. — *Sur l'équilibre et le mouvement des fluides.*

Distinction entre les solides et les fluides au point de vue de la répartition des pressions. — Du calorique dans les corps.

Éc. Pol. : cah. XIX, p. 204. — *Sur une espèce particulière de mouvement dans les fluides.*

C. R. : 1852, 2e *sem.*, p. 940. — *Sur le mouvement de rotation d'un corps solide, et en particulier d'un corps pesant autour d'un point fixe.*

TIGES ET PLAQUES ÉLASTIQUES.

Anc. Ex. : t. III, p. 245 (72 pages). — *Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide.*

Considérations générales. — Équations d'équilibre ou de mouvement d'une lame naturellement droite, et d'épaisseur constante ou variable. — Cas d'une lame naturellement courbe et d'épaisseur constante. — Les résultats théoriques de ces recherches ont été vérifiés par une série d'expériences, entreprises, à cette occasion, par M. Savart.

Anc. Ex. : t. III, p. 328 (27 pages). — *Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide.*

Considérations générales. — Cas d'une plaque naturellement plane, et d'épaisseur constante ou variable.

Anc. Ex. : t. III, p. 356. — *Sur l'équilibre et le mouvement d'une verge rectangulaire.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 1. — *Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque élastique dont l'élasticité n'est pas la même en tous sens.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 15. — *Sur l'équilibre et le mouvement d'une verge rectangulaire extraite d'un corps solide dont l'élasticité n'est pas la même en tous sens.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 43. — *Sur les vibrations longitudinales d'une verge cylindrique ou prismatique, à base quelconque.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 47. - **Inst.** : t. IX, p. 119. — *Sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire.*

Inst. : t. IX, p. 117. - **Bull. Fér.** : t. XI, p. 111. — *Démonstration analytique d'une loi découverte par M. Savart, et relative aux vibrations des corps solides ou fluides.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 323. — *Sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides.*

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 326. — *Recherches nouvelles sur la torsion des prismes.*

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

Anc. Ex. : t. II, p. 1 (22 pages). — *Recherche des équations générales d'équilibre pour un système de points matériels, assujettis à des liaisons quelconques.*

Considérations générales. — Équilibre de plusieurs points assujettis à une seule liaison. — Cas d'un nombre quelconque de liaisons. — Principe des vitesses virtuelles.

Anc. Ex. : t. III, p. 160 (27 pages). — *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique.*

Les formules exposées dans ce Mémoire servent de base à la théorie de l'élasticité des corps.

Anc. Ex. : t. III, p. 188 (24 pages). — *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

Ce Mémoire reproduit, par une méthode nouvelle, les équations obte-

nues antérieurement par M. Navier, et leur donne un plus grand degré de généralité. Les résultats de M. Navier se déduisent des formules de Cauchy en supposant que l'élasticité soit la même dans tous les sens.

Anc. Ex. : t. IV, p. 129. — *Sur les équations différentielles d'équilibre ou de mouvement, pour un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 293 (26 pages). — *Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues.*

Inst. : t. IX, p. 114. — *Sur le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très-petites distances, et sur la théorie de la lumière.*

Inst. : t. XXII, p. 599. — *Sur les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther dans un corps cristallisé.*

Influence des milieux cristallisés sur les vibrations de l'éther. — Équations de l'équilibre et du mouvement d'un double système de molécules. — Mouvements infiniment petits d'un système de molécules placé en présence d'un autre système dont chaque molécule reste sensiblement immobile. — Mouvements vibratoires des corps homogènes.

Inst. : t. XXII, p. 615 (39 pages). - **C. R.** : 1849, 2e *sem.*, p. 761. — *Mémoires sur les systèmes isotropes de points matériels.*

Les systèmes isotropes sont caractérisés par cette circonstance, que les équations du mouvement ne sont pas altérées quand on fait tourner les axes de coordonnées autour de l'origine. — Caractères et propriétés d'une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points. — Formes spéciales des fonctions isotropes assujetties à certaines conditions. — Sur les mouvements vibratoires infiniment petits des systèmes isotropes de points matériels. — Mouvements infiniment petits de l'éther dans les corps isophanes.

Bull. Phil. : 1823, p. 9. — *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 1. — *Sur les mouvements d'un système de molécules.*

Recherches sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules, servant à la théorie des fluides lumineux et à celle des vibrations des corps élastiques. — Mouvements simples correspondant au cas où les équations différentielles sont linéaires et à coefficients constants. L'intégration s'effectue au moyen de fonctions exponentielles à trois variables. — Détermination des plans invariables et de divers éléments, tels que les amplitudes, les phases, les modules, les arguments, les longueurs d'ondes et les durées des vibrations.

Nouv. Ex. : t. I, p. 33. — *Sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement.*

Ce Mémoire a pour objet de résoudre, à l'égard d'un double système de molécules, les diverses questions analysées dans le travail précédent sur un système simple.

Nouv. Ex. : t. I, p. 101 (33 pages). — *Sur les mouvements infiniment petits dont les équations présentent une forme indépendante de la variation des trois axes coordonnés, supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes.*

Sur quelques théorèmes relatifs à la transformation des coordonnées rectangulaires. — Condition que doit remplir une fonction de deux ou de trois coordonnées pour devenir indépendante de la direction des axes coordonnés. — De la forme que prennent les équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules dans le cas où ces équations deviennent indépendantes de la direction des axes de coordonnées, ou seulement de deux de ces axes. — Cas de deux systèmes homogènes de molécules qui se pénètrent mutuellement.

C. R. : 1839, 1er *sem.* — Neuf *Mémoires*, formant un ensemble de cent vingt pages environ, *sur les mouvements infiniment petits des systèmes de molécules.*

Ces Mémoires reproduisent en grande partie ceux dont il vient d'être parlé.

C. R. : 1842, 1er *sem.*, p. 403. — *Sur l'intégration des équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules dont l'élasticité reste la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à une droite donnée.*

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 774. — *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de molécules dont les dimensions ne sont pas supposées nulles.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 348. — *Sur le mouvement des systèmes de molécules.*

C. R. : 1847, 1er *sem.*, p. 414. — *Sur les mouvements d'un système de molécules dont chacune est considérée comme formée par la réunion de plusieurs atomes ou points matériels.*

Simple énoncé.

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 673; 2e *sem.*, p. 12. — *Sur les douze équations qui déterminent les mouvements de translation, de rotation et de dilatation d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

C. R. : 1848, 2e *sem.*, p. 93. — *Sur le mouvement d'un système de*

molécules dans le cas où l'on considère les corps comme des systèmes de points matériels dont chacun est lui-même formé par la réunion de plusieurs atomes.

C. R. : 1848, 2e *sem.*, p. 572; 1849, 2e *sem.*, p. 763; 1850. 1er *sem.*, p. 2. — *Énoncé de divers Mémoires concernant les mouvements des systèmes simples ou doubles de molécules.*

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 643. — *Sur les vibrations infiniment petites des systèmes de points matériels.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 2. — *Sur les mouvements infiniment petits des systèmes de molécules et sur la théorie de la lumière.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 17. — *Sur les perturbations produites dans les mouvements vibratoires d'un système de molécules par l'influence d'un autre système.*

C. R. : 1851, 1er *sem.*, p. 323. — *Sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides.*

PRESSIONS, TENSIONS, CONDENSATIONS, DILATATIONS.

Anc. Ex. : t. II, p. 42. — *De la pression ou tension dans un corps solide.*

On supposait habituellement que les pressions étaient toujours normales aux éléments de surface, et qu'elles demeuraient les mêmes en tous sens autour d'un point. Les nouvelles formules de Cauchy ne sont point assujetties à cette hypothèse. — Application au phénomène de la double réfraction.

Anc. Ex. : t. II, p. 60. — *Sur la condensation et la dilatation des corps solides.*

Variation de densité autour de chaque point sous l'action des forces extérieures. — Variations principales suivant trois axes rectangulaires. — Ellipsoïde des densités.

Anc. Ex. : t. II, p. 108. — *Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices.*

Anc. Ex. : t. III, p. 213. — *De la pression ou tension dans un système de points matériels.*

Anc. Ex. : t. III, p. 237. — *Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation des corps.*

Anc. Ex. : t. IV, p. 30 et 41. — *Sur les pressions ou tensions supportées en un point donné d'un corps solide par trois plans perpendiculaires entre eux.*

Sur la relation qui existe entre les pressions ou tensions supportées par deux plans quelconques en un point donné d'un corps solide.

Anc. Ex. : t. IV, p. 214. — *Sur les corps solides ou fluides dans lesquels la condensation ou dilatation linéaire est la même en tous sens, autour de chaque point.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 302 (28 pages). — *Formules relatives aux changements de forme que peut subir un système de points matériels.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 588. — *Sur les pressions et tensions dans un double système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 1166; 1843, 1er *sem.*, p. 12. — *Sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels.*

Démonstration de sept théorèmes qui jouent, dans la Mécanique des systèmes, le même rôle que les théorèmes d'Euler dans la théorie de la courbure des surfaces.

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 151. — *Sur les pressions supportées dans un corps solide ou fluide par deux portions de surface très-voisines : l'une intérieure, l'autre extérieure à ce même corps.*

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 299, 954, 1035 (28 pages). — *Sur les pressions ou tensions intérieures, mesurées dans un ou plusieurs systèmes de points matériels que sollicitent des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

Réduction des formules dans le cas où le système donné devient isotrope. — Examen du cas de deux systèmes superposés l'un à l'autre.

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 125. — *Observations sur la pression que supporte un élément de surface plane dans un corps solide ou fluide.*

CONDITIONS RELATIVES AUX LIMITES DES CORPS.

Inst. : t. XXII, p. 17. — *Sur les conditions relatives aux limites des corps, et en particulier sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière.*

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 374, 432, 459. — *Sur une méthode générale*

propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps, dans les problèmes de Physique mathématique.

Application du principe fondamental : 1° à un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre; 2° à un système d'équations différentielles linéaires du second ordre ou d'un ordre plus élevé; 3° à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles. — Note sur un théorème d'Analyse et sur son application aux questions de Physique mathématique.

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 266. — *Considérations nouvelles sur les conditions relatives aux limites des corps.*

Méthode élémentaire propre à conduire aux lois générales de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples qui rencontrent la surface de séparation de deux systèmes de molécules.

C. R. : 1852, 2e *sem.*, p. 297, 322, 341. — *Énoncé de divers Mémoires pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, sous des conditions données relatives aux limites des corps.*

Application à la théorie des calorifères cylindriques.

QUESTIONS DIVERSES.

Sav. Étr. : t. I, p. 1 (312 pages). — *Mémoire sur la propagation des ondes à la surface d'un liquide pesant, d'une profondeur indéfinie.*

Couronné en 1815 par l'Institut et publié en 1825 avec une série de vingt Notes, dans lesquelles sont exposés plusieurs points de théorie relatifs, pour la plupart, aux intégrales définies et à leurs développements en séries.

Bull. Phil. : 1815, p. 53. — *De la différence entre les attractions exercées par une couche infiniment mince sur deux points très-rapprochés l'un de l'autre, et situés, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de cette même couche.*

Anc. Ex. : t. III, p. 121. — *Sur la division d'une masse solide ou fluide en couches homogènes.*

Journ. Liouv. : t. II, p. 406. — *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique.*

Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin (1831).

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 525 et 558. — *Considérations sur la constitution intime des corps.*

Constitution des molécules intégrantes. — Mouvements atomiques des corps cristallisés.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 102. — *Sur une démonstration très-simple d'un théorème que comprend, comme cas particulier, le théorème fondamental sur lequel repose la théorie des constantes arbitraires.*

Simple énoncé.

C. R. : 1843, 1er *sem.*, p. 517. — *Sur l'équilibre des températures dans un cylindre de forme quelconque.*

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 1760. — *Note relative aux principes de la Mécanique rationnelle.*

C. R. : 1845, 2e *sem.*, p. 134. — *Réflexions philosophiques sur les principes de la Mécanique rationnelle.*

Sur les secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques, ou même aux sciences morales, et sur l'accord des théories mathématiques et physiques avec la véritable philosophie.

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 69. — *Sur les rayons vecteurs associés, et sur les avantages que présente l'emploi de ces rayons vecteurs dans la Physique mathématique.*

C. R. : 1856, 2e *sem.*; 1857, 1er *sem.* — *Divers articles relatifs à une discussion sur la théorie mathématique du choc des corps.*

RAPPORTS.

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 855. — *Sur un Mémoire de M. Duhamel relatif à l'action de l'archet sur les cordes.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 659 et 687. — *Sur le nouveau système de navigation à vapeur de M. de Jouffroy.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 957. — *Sur deux Mémoires de M. Duhamel relatifs aux vibrations des cordes que l'on a chargées de curseurs.*

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 1234. — *Sur divers Mémoires de M. Barré de Saint-Venant, relatifs à la Mécanique rationnelle et à la Mécanique appliquée.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 911. — *Sur le système proposé par M. de Jouffroy pour les chemins de fer.*

C. R. : 1848, 2e *sem.*, p. 105. — *Sur un Mémoire de M. Laurent, relatif aux équations d'équilibre et de mouvement d'un système de*

sphéroïdes sollicités par des forces d'attraction et de répulsion mutuelle.

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 376. — *Sur un Mémoire de M. Roche, relatif aux figures ellipsoïdales qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné.*

C. R. : 1851, 2e *sem.*, p. 326. — *Sur deux Mémoires de M. Vertheim.*

CHAPITRE XI.

OPTIQUE.

SOMMAIRE. — Travaux de Fresnel et de Cauchy. — Équations générales des mouvements lumineux. — Propagation de la lumière dans les milieux isophanes et dans les cristaux. — Polarisation, réflexion, réfraction, dispersion, diffraction de la lumière. — Sur la non-dispersion de la lumière dans les espaces célestes. — Conséquences pour la constitution de l'éther.

MÉMOIRES. — *Principes généraux de l'optique.* — *Propagation des ondes.* — Équations générales. — Réduction de la chaleur et de la lumière à une même théorie. — Propagation des ondes dans les milieux isophanes et dans les milieux cristallisés. — Délimitation des ondes. — *Réflexion et réfraction de la lumière.* — Explication mathématique de la réflexion et de la réfraction de la lumière. — Sur les trois espèces de rayons lumineux qui correspondent aux mouvements simples du fluide éthéré. — Rayons évanescents. — Mesure de la quantité de lumière réfléchie par les métaux. — Expériences de M. Jamin. — Lames minces. — Anneaux colorés. — *Polarisation.* — Divers modes de polarisation. — *Dispersion.* — Théorie mathématique de la dispersion. — Expériences de Frauenhofer. — *Diffraction.* — Diffraction de la lumière et du son. — Analogies et différences. — *Ouvrages à consulter.*

SOMMAIRE.

La théorie des phénomènes lumineux, dans le système des ondulations, a été établie d'abord par Fresnel, en prenant pour point de départ un petit nombre de faits d'expériences d'où l'Analyse tire ensuite l'explication de tous les autres. Le premier, et le plus important, est le fait de l'interférence des rayons de lumière dans de certaines conditions; on en conclut que de la lumière

ajoutée à de la lumière peut, dans certains cas, donner de l'obscurité. Ce résultat singulier n'a pas d'explication satisfaisante dans le système de l'émission, et il montre que les phénomènes lumineux sont dus à des mouvements vibratoires. La non-interférence des rayons polarisés à angle droit fait voir ensuite que les vibrations sont transversales aux rayons, c'est-à-dire qu'elles ont lieu sur la surface même des ondes, sans altérer la densité du milieu, ce qui les distingue essentiellement des ondes sonores. En outre, la double réfraction des cristaux établit que, dans ces corps, l'élasticité n'est pas la même en tous sens; cette double réfraction peut, du reste, être communiquée artificiellement aux substances simplement réfringentes, au verre, par exemple, au moyen d'une forte compression latérale qui modifie évidemment la distribution des forces élastiques.

En partant ainsi de quelques faits simples et bien observés, et en combinant avec une rare sagacité les résultats de l'expérience et du calcul, Fresnel était arrivé à donner une explication à peu près complète des phénomènes si variés de l'optique. Il restait toutefois à réunir les théories partielles en un seul corps de doctrine, et à les faire dépendre d'une théorie unique, en les rattachant aux lois fondamentales de la Mécanique. On peut encore ajouter que les principes eux-mêmes n'étaient pas suffisamment à l'abri de toute objection. Plusieurs des conséquences de Fresnel, et notamment la propriété des vibrations d'être transversales à la direction des rayons, furent vivement combattues par divers savants éminents, au nombre desquels se trouvait Poisson; leur exactitude ne fut définitivement reconnue que lorsque Cauchy eut démontré que les mouvements de ce genre étaient non-seulement compatibles avec les équations générales des

mouvements infiniment petits des systèmes de points matériels, mais qu'ils en étaient même la conséquence naturelle.

Pour expliquer les phénomènes lumineux dans la théorie des ondulations, il faut concevoir que, dans l'intérieur d'un corps primitivement en équilibre, une ou plusieurs molécules voisines viennent subitement à être ébranlées. Il en résultera une série de vibrations qui se propageront de proche en proche, à la façon des mouvements sonores. Si le milieu est homogène et doué de la même élasticité en tous sens, les vibrations, d'abord circonscrites dans un très-petit espace, se développeront sous forme d'ondes sphériques autour du centre d'ébranlement. A une distance suffisamment grande, on pourra considérer l'onde comme plane, ou bien lui substituer la portion voisine du plan tangent. Supposons maintenant que plusieurs ondes, dont les plans sont peu inclinés les uns sur les autres, viennent à se superposer, il en résultera, au point de coïncidence, une sensation de lumière, et on appellera *rayon lumineux* la droite sur laquelle sont situés les points où ont lieu les superpositions consécutives. Dans les milieux isophanes, ce rayon sera unique; dans les autres milieux il se doublera, et pour qu'il redevienne unique, il faudra que les déplacements des molécules soient parallèles à l'un des trois axes d'un ellipsoïde déterminé, et l'on aura des rayons polarisés suivant ces directions. En général, une onde plane équivaut à trois rayons polarisés suivant trois directions distinctes; si le milieu est isophane, c'est-à-dire si l'élasticité de l'éther est la même en tous sens, deux des ondes partielles se propageront avec la même vitesse et se superposeront de manière à n'en former qu'une seule, polarisée parallèlement au plan de l'onde primitive; la dernière

sera distincte et polarisée perpendiculairement à ce plan.

Les équations générales de la lumière ont été données pour la première fois par Cauchy dans divers Mémoires publiés en 1829 et 1830. Elles se présentaient comme un cas particulier de ses recherches sur les mouvements infiniment petits des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction et de répulsion mutuelle. Dans ces équations, qui sont linéaires et aux dérivées partielles, entrent trois variables principales représentant les déplacements élémentaires d'une molécule par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires, et quatre variables indépendantes, qui sont les coordonnées de la molécule et le temps. Si l'on considère un seul système homogène de molécules, les coefficients des variables principales et ceux de leurs dérivées seront constants, et il en sera encore de même pour un système quelconque si l'on se borne à une première approximation. Mais en général la forme des équations et la forme des coefficients dépendront de la nature du milieu et de la direction des axes de coordonnées. Si les valeurs des coefficients sont indépendantes de la direction des axes, on dit que le système est isotrope, et alors la propagation du mouvement s'effectue de la même manière en tous sens; c'est le cas de la propagation du son dans les gaz ou les liquides, et c'est aussi ce qui a lieu pour un double système de molécules dont l'un est le fluide éthéré, et l'autre ce qu'on appelle en optique un *corps isophane*. Enfin il peut encore arriver que, l'un des axes restant fixe, les équations ne changent pas quand on fait tourner les deux autres autour du premier; alors la propagation de la lumière s'effectue uniformément autour de cet axe et autour de tout axe parallèle. Ce cas se présente lorsque l'un des deux systèmes est l'éther, et l'autre un assemblage de

molécules constitué comme le sont les cristaux à un axe optique. Les mêmes équations serviront donc également à expliquer la propagation de la lumière dans les milieux isophanes et dans les corps biréfringents.

Polarisation. — Le mode de polarisation de la lumière est déterminé par la nature de la trajectoire élémentaire que décrit la molécule éthérée. Si elle se meut en ligne droite dans le plan de l'onde, le rayon lumineux sera plan, et on dira qu'il est polarisé dans un plan perpendiculaire à celui du rayon lui-même; si la molécule décrit un cercle ou une ellipse, on aura la polarisation circulaire ou elliptique.

L'état de polarisation d'un rayon est modifié par diverses circonstances, particulièrement par le passage dans un corps biréfringent. Il l'est également par les phénomènes de réflexion et de réfraction. Enfin la polarisation dépend essentiellement de la nature du corps qui la produit, et on la définit pour chaque corps au moyen de ce qu'on appelle l'*angle de polarisation.* On imaginera qu'un rayon de lumière tombe sur un miroir poli composé de la substance en question et s'y réfléchisse : lorsque le rayon réfléchi sera polarisé le plus complétement possible, l'angle d'incidence sera l'angle de polarisation relatif à cette substance. Le rayon réfléchi est alors perpendiculaire à la direction du rayon qui serait réfracté dans l'intérieur du miroir, et l'on est conduit à la loi suivante, découverte par Brewster : « L'angle de polarisation complète des rayons lumineux réfléchis par la surface de séparation de deux milieux transparents et isophanes a pour tangente l'indice de réfraction. » Cette loi cesse d'avoir lieu pour la réflexion à la surface des corps biréfringents; l'angle de polarisa-

tion varie alors avec les positions relatives du plan de réflexion et de la section principale du cristal.

Parmi les phénomènes de l'optique, la polarisation est peut-être celui qui est lié le plus intimement à la constitution intérieure des corps. Les cristaux ne sont pas les seuls corps qui modifient l'état de polarisation des rayons lumineux; M. Biot a reconnu que diverses substances liquides ou même gazeuses jouissent de la même propriété; telles sont, par exemple, les dissolutions concentrées de sucre, l'essence de térébenthine et les vapeurs de ces mêmes substances qui font éprouver une rotation variable aux plans de polarisation des rayons. Cauchy avait d'abord espéré obtenir l'explication de ces faits au moyen des équations générales des mouvements lumineux, mais des difficultés inattendues se produisirent, et il fut obligé de recourir à d'autres méthodes. Dans les questions de Mécanique et de Physique, on suppose ordinairement connues les forces et les masses qui constituent les systèmes, et on en déduit ensuite l'interprétation des divers phénomènes. C'est ainsi que les Géomètres ont, depuis longtemps déjà, expliqué le son, et que Cauchy lui-même, dans ses premiers Mémoires sur l'optique, est parvenu à établir, par le seul secours de l'Analyse, l'existence des vibrations transversales. Dans la question actuelle, il se vit obligé de suivre une marche inverse, et, au lieu de former *à priori* les équations différentielles, il essaya de remonter des faits à ces équations elles-mêmes. Cette méthode le conduisit à une foule de résultats remarquables; nous citerons en particulier le suivant : « Pour que la polarisation d'un rayon lumineux soit circulaire, il suffit que la dilatation symbolique du volume s'évanouisse avec la somme des carrés des trois déplacements symboliques de chaque molécule. »

Réflexion et réfraction. — Les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière ont été établies pour la première fois par Cauchy, sans recourir à des formules empiriques ou à des hypothèses plus ou moins gratuites, et en discutant simplement les équations de condition relatives aux surfaces de séparation des milieux. Lorsque deux milieux sont séparés par une surface déterminée, et qu'un système d'ondes lumineuses, traversant le premier milieu, atteint le second, l'analyse démontre que le système des ondes incidentes se partage en deux autres, dont l'un est réfléchi dans le premier milieu, et l'autre réfracté dans le second. On arrive ainsi aux lois expérimentales de la réflexion et de la réfraction, et l'on obtient en outre des formules remarquables pour la mesure des quantités de lumière polarisée; on retrouve de cette façon les résultats auxquels Fresnel et Brewster avaient été conduits par l'observation. D'ailleurs, comme la réfraction n'a pas d'influence sur la nature des couleurs, on en conclut que toutes les ondes réfractées, comprises dans un même rayon, se propagent avec la même vitesse.

Rayons évanescents. — On a vu dans le Chapitre précédent que si, dans un mouvement simple, infiniment petit, le module est constamment égal à l'unité, le rayon de lumière correspondant se propage sans s'affaiblir; si le module diffère de l'unité, l'amplitude des vibrations décroît en progression géométrique, tandis que la distance à un plan fixe croît en progression arithmétique; alors le rayon devient ce que Cauchy appelle un *rayon évanescent.*

La lumière que renferme un rayon évanescent peut être, dans un grand nombre de cas, perçue par l'œil.

Telle est en particulier la lumière verte transmise par voie de réfraction à travers une feuille d'or très-mince; telle est encore la lumière transmise à travers les faces latérales d'un prisme de verre qui a pour bases deux triangles rectangles, et fournie par un rayon émergent qui rase la face de sortie, dans le cas où le rayon réfracté forme, avec la normale à cette dernière face, un angle supérieur à l'angle de réflexion totale. Alors le rayon émergent s'éteint graduellement, tandis que le rayon incident forme un angle de plus en plus petit avec la face d'entrée.

En général, lorsqu'un mouvement simple se propage dans un milieu isophane, il donne naissance à trois systèmes de vibrations : les unes transversales, c'est-à-dire perpendiculaires à la direction du rayon ; les autres longitudinales, c'est-à-dire dirigées dans le sens même de l'axe du rayon. Si, pour chacun de ces mouvements élémentaires, le module est constamment égal à l'unité, ils se propageront chacun sans s'affaiblir; mais si le module diffère de l'unité, les rayons, soit transversaux, soit longitudinaux, seront remplacés par des rayons évanescents. En particulier, « le rayon évanescent qui tiendra lieu d'un rayon à vibrations longitudinales sera un rayon simple, composé de molécules dont les vibrations s'exécuteront dans des plans perpendiculaires aux traces des plans des ondes sur le plan fixe correspondant au module égal à l'unité. »

Il est nécessaire de tenir compte de ce résultat dans l'explication de la réflexion et de la réfraction de la lumière, car le troisième rayon réfléchi ou réfracté est précisément du genre des rayons évanescents, et est dirigé de manière à raser la surface de séparation des deux milieux.

La théorie des rayons évanescents est l'un des résultats les plus remarquables des recherches de Cauchy sur l'optique, et confirme en même temps d'une manière décisive l'exactitude des principes de sa méthode; car elle donne l'explication de phénomènes très-singuliers, dont on n'avait auparavant aucune idée, et qui ont été du reste complétement vérifiés par les belles expériences de M. Jamin.

Dispersion. — Pour expliquer la réflexion, la réfraction et la polarisation de la lumière, il n'est pas nécessaire de considérer les équations des mouvements infiniment petits sous leur forme la plus générale; on peut négliger sans inconvénient certains termes qui sont sans influence sur ces phénomènes. Toutefois les équations ainsi réduites sont simplement approximatives, et ne peuvent servir à rendre compte de tous les faits. En particulier, elles ne font rien connaître relativement à la dispersion des couleurs dans le prisme. Ce dernier phénomène montre que, dans les corps transparents, la vitesse de propagation de la lumière n'est pas la même pour les ondes partielles. Il en est d'ailleurs de la lumière comme du son : la nature de chaque couleur est déterminée par la durée plus ou moins grande des vibrations éthérées, de la même manière que, en acoustique, la nature du son est caractérisée par la durée plus ou moins grande des oscillations excitées dans les corps. Enfin la séparation régulière des couleurs indique qu'il y a une relation déterminée entre la vitesse de propagation de la lumière et la durée des vibrations lumineuses. Pour étudier les phénomènes de ce genre, il devient nécessaire de compléter les équations fondamentales, en tenant compte des termes secondaires qui avaient pu d'abord

être négligés. En suivant cette idée qui lui fut suggérée par Coriolis, Cauchy parvint, non-seulement à assigner les causes du phénomène de la dispersion, mais encore à en fixer les lois, qui, malgré les travaux de plusieurs physiciens, étaient restées jusqu'alors inconnues.

La dispersion de la lumière n'a pas lieu à travers les espaces célestes : autrement les étoiles nous apparaîtraient sous la forme de spectres irisés; on en conclut que l'éther transmet avec la même vitesse les rayons des diverses couleurs. Il en est de même pour les gaz où l'on n'a encore découvert aucune trace sensible de dispersion ; mais dans les corps solides ou liquides, les choses se passent autrement : l'influence des molécules pondérables modifie alors la constitution du milieu éthéré, et la séparation des couleurs s'effectue.

L'absence de la dispersion dans l'éther céleste et dans les gaz conduit à des conséquences remarquables concernant la loi de l'action mutuelle des molécules d'éther dans ces milieux. Il suffit pour cela d'exprimer que la vitesse de propagation des diverses ondes dont se compose un rayon de lumière blanche est indépendante de leur épaisseur ou de la durée des vibrations. Or, si l'on suppose l'action mutuelle des molécules réciproquement proportionnelle au cube de leur distance, ou bien à une puissance comprise entre la seconde et la quatrième, on trouve que la vitesse de propagation des vibrations transversales s'évanouit, ce qui n'a pas lieu si l'on admet que cette action soit, ou bien une force attractive réciproquement proportionnelle au carré de la distance, ou bien une force répulsive inversement proportionnelle au bicarré de la distance. La première hypothèse est inadmissible, et le phénomène de la dispersion permet de décider entre les deux dernières. L'Analyse apprend, en

effet, que, dans le second cas, la vitesse de propagation des ondes doit être proportionnelle à l'épaisseur des ondes, et que, dans le troisième, elle doit en être indépendante. L'absence de dispersion pour l'éther des espaces planétaires et pour les gaz montre que cette dernière circonstance est, en effet, réalisée; il faut donc en conclure que, dans ces milieux, l'action réciproque des molécules d'éther est répulsive de sa nature et varie en raison inverse du bicarré de la distance, au moins dans le voisinage du contact. Cependant, les hypothèses précédentes étant seulement approchées, et les molécules ne pouvant jamais être absolument en contact, il y avait lieu de se demander si la dispersion des couleurs est alors rigoureusement nulle ou seulement insensible.

Certaines observations astronomiques relatives aux étoiles changeantes paraissaient de nature à décider la question. L'étoile Algool, par exemple, est douée d'un éclat périodique, et, dans un intervalle de quelques heures, perd plus de la moitié de sa lumière. Si les rayons partis de cette étoile ne se propageaient pas avec la même vitesse, leur différence de marche, quelque petite qu'elle soit, finirait par devenir sensible, à cause de la grande distance, et il en résulterait des variations de couleur, en sens divers, suivant que l'éclat de l'astre irait en augmentant ou en diminuant. Des observations précises, entreprises à ce sujet par Arago, n'ont accusé aucune trace appréciable de coloration à quelque époque que ce soit des phases, et il faut en conclure que la dispersion des couleurs dans le vide est, sinon rigoureusement nulle, du moins beaucoup trop faible pour qu'on puisse la rendre sensible, même dans les circonstances les plus favorables.

La comparaison des résultats de l'expérience et de

l'Analyse relativement au phénomène de la dispersion conduit à une foule de conséquences du plus haut intérêt sur la constitution et les vibrations de l'éther; nous indiquerons sommairement les plus remarquables. Quel que soit le degré de subdivision de la matière pondérable, celle de l'éther est incomparablement d'un ordre plus élevé, de telle sorte que, dans un espace élémentaire renfermant quelques molécules de matière, les molécules d'éther se compteront par millions de millions. Quant à la vitesse de propagation de la lumière, elle est proportionnelle à la racine carrée de la densité de l'éther, toutes les fois que la dispersion est nulle. Si la dispersion se produit, le rapport des vitesses de propagation, en passant du violet au rouge, ne surpassera pas l'unité de un cent-millième. En admettant ce rapport, on trouvera que la distance de deux molécules voisines d'éther est inférieure à trois millionièmes de millimètre, c'est-à-dire inférieure à un deux-centième de l'épaisseur moyenne des ondes, de sorte que la dimension des ondulations est de beaucoup supérieure à la distance des molécules éthérées. Si l'on veut, en outre, caractériser par des nombres les éléments des ondes, on pourra ajouter que leur épaisseur varie entre 406 et 645 millionièmes de millimètre, correspondant au violet extrême et au rouge extrême. De plus, le nombre des vibrations exécutées pendant une seconde est compris entre 764 et 481 millions de millions qui sont relatifs aux mêmes couleurs. Enfin on sait que la vitesse de propagation de la lumière dans le vide sidéral est environ de 80 000 lieues par seconde, ce qui établit une relation entre les épaisseurs des ondes et la durée des vibrations.

Diffraction. — L'une des principales objections adres-

sées à la théorie des ondulations de l'éther se tirait de l'existence des ombres et de la propriété que possèdent les écrans d'arrêter la marche des rayons lumineux. Cauchy a résolu cette objection d'une manière définitive en montrant comment l'explication de ces faits se déduit des équations générales des mouvements lumineux, et en donnant simultanément l'interprétation des phénomènes de diffraction qui se manifestent par des franges produites vers les bords des corps éclairés. Ses recherches l'ont de plus conduit à des résultats analogues, et jusqu'alors inconnus, pour les ondes sonores. Les franges occasionnées par un rayon de lumière qui traverse une fente étroite, ont de faibles dimensions et deviennent insensibles pour peu qu'on s'écarte de l'axe du rayon ; mais les choses se passent autrement pour le son. A côté de plusieurs analogies intimes, il y a, entre les ondes lumineuses et les ondes sonores, des différences essentielles. Les premières sont transversales et ont lieu sans changement de densité; les secondes sont longitudinales et sont accompagnées de condensations et de dilatations alternatives. Il existe, en outre, une extrême inégalité entre les épaisseurs des ondes dans les deux cas. Tandis que les ondes lumineuses perçues par l'œil ont une épaisseur comprise entre un tiers et deux tiers de millième de millimètre, celle des ondes sonores sensibles à l'oreille varie entre 2 centimètres et plusieurs mètres. Il en résulte pour le son des effets de diffraction qui s'étendent beaucoup plus loin, et qui peuvent encore être sensibles à plusieurs mètres de distance. Des expériences entreprises à ce sujet par Savart et par Yung ont pleinement confirmé ces nouveaux résultats de l'analyse.

MÉMOIRES.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE L'OPTIQUE. — PROPAGATION DES ONDES.

Anc. Ex. : t. V, p. 19 (53 pages). — *Application des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction et de répulsion mutuelle, à la théorie de la lumière.*

Considérations générales. — Propagation des ondes planes. — Surface des ondes.

Bull. Fér. : t. XI, p. 112. - **Inst.** : t. IX, p. 114. — *Sur le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très-petites distances, et sur la théorie de la lumière.*

Bull. Fér. : t. XIII, p. 114. - **Mém. Dét.** : 1830 et 1836. — *Sur la théorie de la lumière.*

Inst. : t. X, p. 293 (24 pages). — Deux *Mémoires sur la théorie de la lumière.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 288 (40 pages). - **C. R.** : 1840, 1er *sem.*, p. 905. — *Sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope de points matériels.*

Nouv. Ex. : t. II, p. 99. - **C. R** : 1841, 2e *sem.*, p. 184. — *Sur la surface caractéristique correspondant à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, et sur la surface des ondes.*

C. R. : 1836, 1er *sem.*, p. 182 et suiv. — *Six lettres sur la théorie mathématique de la lumière.*

C. R. : 1838, 2e *sem.*, p. 751. — *Sur les vibrations de l'éther dans un milieu ou dans le système de deux milieux, lorsque la propagation de la lumière s'effectue de la même manière, en tous sens, autour de tout axe parallèle à une droite donnée.*

C. R. : 1838, 2e *sem.*, p. 865. — *Sur la propagation du mouvement par ondes planes dans un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très-petites distances.*

Analogie de ces ondes avec celles dont la propagation donne naissance aux phénomènes de la polarisation de la lumière et de la double réfraction.

C. R. : 1838, 2e *sem.*, p. 907. — *Formules extraites de deux Mémoires présentés à l'Académie sur la théorie mathématique de la lumière.*

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 582. — *Sur la nature des ondes lumineuses, et généralement de celles qui se propagent dans les systèmes de molécules.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 283. — *Mémoire ayant pour objet de montrer comment une seule théorie peut fournir les lois de la propagation de la chaleur et de la lumière.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 188. — *Sur l'emploi des fonctions principales représentées par des intégrales définies doubles dans la recherche des ondes lumineuses ou sonores.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 319. — *Sur la surface des ondes lumineuses dans les cristaux à deux axes optiques.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 960. — *Observations sur une Note de M. Blanchet relative à la théorie des ondes.*

C. R. : 1842, 1er *sem.*, p. 389. — *Rapport sur deux Mémoires de M. Blanchet relatifs à la propagation du mouvement dans les milieux élastiques cristallisés, et en particulier à la délimitation des ondes.*

Notes diverses de Cauchy concernant la question. — Sur l'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et à coefficients constants. — Intégration d'une équation linéaire, aux dérivées partielles, à coefficients constants, avec un dernier terme fonction des variables indépendantes. — Intégration des équations qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système de molécules dont l'élasticité reste la même en tous sens, autour d'un axe parallèle à une droite donnée.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 813. — *Sur les différences qui existent entre les ondes lumineuses et les ondes sonores.*

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 1180. — *Remarques à l'occasion d'une communication de M. Laurent, sur la théorie mathématique de la lumière.*

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 606. — *Recherche des intégrales qui représentent les mouvements infiniment petits des corps homogènes, et spécialement les mouvements par ondes planes.*

Délimitation des ondes au moyen des coefficients limitateurs.

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 728. - Inst. : t. XXII, p. 599. — *Sur les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther contenus dans un corps cristallisé.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 33. — *Sur la propagation de la lumière dans les milieux isophanes. — Sur les vibrations de l'éther dans un milieu homogène dont les molécules restent sensiblement immobiles.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 93. — *Sur les vibrations de l'éther dans les milieux qui sont isophanes par rapport à une direction donnée.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 338. — *Sur les équations différentielles du mouvement de l'éther dans les cristaux à un ou à deux axes optiques.*

RÉFLEXION ET RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE.

Bull. Fér. : t. XIV, p. 6. — *Sur la réflexion et la réfraction de la lumière.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 133 (45 pages). — *Sur la réflexion et la réfraction dans un milieu homogène.*

Équations des mouvements infiniment petits d'un système homogène de molécules. — Réduction de ces équations dans le cas où elles deviennent indépendantes de la direction des axes de coordonnées. — Équations symboliques des mouvements infiniment petits. — Mouvements simples. — Sur les perturbations qu'éprouvent les mouvements simples dans le voisinage d'une surface plane. — Sur les conditions générales de la coexistence des mouvements simples que l'on suppose propagés dans deux portions différentes d'un système moléculaire, diversement constituées et séparées l'une de l'autre par une surface plane. — Sur les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples dans les milieux isotropes.

Nouv. Ex. : t. I, p. 212. — *Sur les rayons simples qui se propagent dans un milieu isotrope, et sur ceux qui sont réfléchis ou réfractés par la surface de séparation.*

Rayons simples. — Polarisation de ces rayons. — Rayons réfléchis ou réfractés par la surface de séparation de deux milieux isotropes. — Sur les deux espèces de mouvements simples qui, dans un milieu isotrope, peuvent se propager sans s'affaiblir. — Des milieux dont les surfaces de séparation polarisent, suivant le plan d'incidence, les rayons réfléchis sous un certain angle.

Inst. : t. XXII, p. 17. - **C. R.** : 1848, 2e *sem.*, p. 99. — *Sur les conditions relatives aux limites des corps, et en particulier sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière.*

Inst. : t. XXII, p. 29. — *Sur les rayons lumineux simples et les rayons évanescents.*

Journ. Liouv. : t. VII, p. 338. — *Note sur la réflexion de la lumière à la surface des métaux, à l'occasion d'un Mémoire de M. Mac-Cullagh sur la même question.*

C. R. : 1838, 2e *sem.*, p. 953, 985, 1044. — *Sur la réflexion et la réfraction de la lumière produites par la surface de séparation de deux milieux doués de la réfraction simple.*

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 7 et suiv. — Sept *Mémoires sur la réflexion et la réfraction de la lumière.*

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 327. — *Sur l'égalité des réfractions de deux rayons lumineux qui émanent de deux étoiles situées dans deux portions opposées de l'écliptique.*

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 553. — *Sur la quantité de lumière réfléchie, sous diverses incidences, par les surfaces des corps opaques, et spécialement des métaux.*

Formules pour la détermination de l'intensité de la lumière réfléchie.

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 964. — *Remarques à l'occasion d'une réclamation de priorité de M. Mac-Cullagh, relativement à certaines formules pour calculer l'intensité de la lumière.*

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 985. — *Sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécules à un autre; chacun de ces deux systèmes étant supposé homogène, et tellement constitué que la propagation des mouvements infiniment petits s'y effectue en tous sens suivant les mêmes lois.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 1, 59, 91. — *Sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 764. — *Sur la réflexion des rayons lumineux produite par la seconde surface d'un corps isophane et transparent.*

C. R. : 1840, 1er *sem.*, p. 347. — *Considérations nouvelles relatives à la réflexion et à la réfraction des mouvements simples.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 418. — *Sur le calcul des phénomènes que présente la lumière réfléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 542. — *Méthode abrégée pour la recherche des lois suivant lesquelles la lumière se trouve réfléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque.*

Examen du cas où les milieux cessent d'être isophanes.

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 86. — *Sur la lumière réfléchie par la surface d'un corps opaque, et spécialement d'un métal.*

C. R. : 1848, 2e *sem.*, p. 621. — *Sur les trois espèces de rayons lumineux qui correspondent aux mouvements simples du fluide éthéré.*
Cas où le troisième rayon lumineux s'évanouit.

C. R. : 1849, 1er *sem.*, p. 2, 25. — *Mécanique moléculaire. — Équations du troisième rayon lumineux. — Rayons évanescents.*

C. R. : 1849, 1er *sem.*, p. 57. — *Sur la réflexion et la réfraction de la lumière et sur de nouveaux rayons réfléchis ou réfractés.*

C. R. : 1849, 1er *sem.*, p. 121. — *Rapport sur un Mémoire de M. Jamin concernant la réflexion de la lumière à la surface des corps transparents.*

C. R. : 1849, 1er *sem.*, p. 161. — *Sur la détermination simultanée de l'indice de réfraction d'une lame ou d'une plaque transparente, et de l'angle compris entre les deux surfaces planes qui terminent cette plaque.*

C. R. : 1849, 1er *sem.*, p. 333. — *Sur les rayons réfléchis ou réfractés par des lames minces, et sur les anneaux colorés.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 97. — *Sur la différence de marche entre deux rayons lumineux qui émergent d'une plaque doublement réfringente à faces parallèles.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 465. — *Sur l'intensité de la lumière dans les rayons réfléchis par la surface d'un corps transparent ou opaque.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 498. — *Rapport sur un travail de MM. de la Provostaye et Desains, relatif à la théorie des anneaux colorés.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 112. — *Rapport sur un Mémoire de M. Jamin, relatif à la double réfraction elliptique du quartz.*
Énoncé d'un Mémoire sur la polarisation rectiligne et la polarisation circulaire.

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 160 et 225. — *Sur les rayons de lumière réfléchis ou réfractés par la surface d'un corps transparent et isophane.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 257. — *Sur la réflexion et la réfraction des rayons lumineux à la surface extérieure ou intérieure d'un cristal.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 297. — *Détermination des trois coefficients qui, dans la réflexion ou la réfraction opérées par la surface extérieure d'un cristal, dépendent des rayons évanescents.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 532. — *Sur un nouveau phénomène de réflexion.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 666. — *Note relative aux rayons réfléchis sous l'incidence principale par la surface extérieure d'un cristal à un axe optique.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 766. — *Note sur la réflexion d'un rayon de lumière polarisée à la surface extérieure d'un corps transparent.*

POLARISATION.

Inst. : t. XVIII, p. 153 (64 pages). — *Sur la polarisation rectiligne et la double réfraction.*

Formules qui représentent les mouvements du fluide lumineux dans le cas où la polarisation est rectiligne. — Détermination des axes optiques dans les milieux biréfringents. — Détermination de la surface des ondes.

Nouv. Ex. : t. I, p. 260. — *Sur les relations qui existent entre l'azimut et l'anomalie d'un rayon simple doué de polarisation elliptique.*

C. R. : 1839, 1er *sem.*, p. 658. — *Sur l'intensité de la lumière polarisée et réfléchie par des surfaces métalliques.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 676. — *Sur la polarisation des rayons réfléchis ou réfractés par la surface de séparation de deux corps isophanes et transparents.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 726. — *Sur les milieux dans lesquels un rayon simple peut être complétement polarisé par réflexion.*

C. R. : 1839, 2e *sem.*, p. 727. — *Sur la polarisation incomplète produite à la surface de séparation de deux milieux par la réflexion d'un rayon simple.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 910. — *Sur l'application de l'analyse mathématique à la recherche des lois générales des phénomènes observés par les physiciens, et en particulier sur les lois de la polarisation circulaire.*

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 940. — *Remarques à l'occasion d'un Mémoire de M. Laurent sur la rotation des plans de polarisation dans les mouvements infiniment petits d'un système de sphéroïdes.*

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 961 ; 1847, 2e *sem.*, p. 331. — *Sur la polarisation chromatique.*

C. R. : 1849, 2e *sem.*, p. 645. — *Démonstration simple de cette pro-*

position que : dans un rayon de lumière polarisée rectilignement, les vibrations des molécules sont perpendiculaires au plan de polarisation.

DISPERSION.

Mém. Dét. : Prague, 1835 (234 pages). — *Sur la dispersion des couleurs.*

Considérations générales. — Équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. — Intégration de ces équations au moyen d'exponentielles imaginaires à trois variables. — Application à la théorie de la lumière. — Propagation des ondes lumineuses dans un milieu où l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens. — Sur la réfraction de la lumière. — Applications numériques. — Sur la propagation de la lumière dans les milieux où sa vitesse reste la même pour toutes les couleurs. — Sur la relation qui existe entre la vitesse de la lumière et l'épaisseur des ondes lumineuses. — Sur les résultats que fournit l'approximation du premier ordre.

C. R. : 1836, 2e *sem.*, p. 422. — *Lettre sur la dispersion de la lumière pour les substances gazeuses.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 1038. — *Mémoire relatif à de nouvelles formules générales qui renferment les lois suivant lesquelles un rayon lumineux est réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux isophanes, dans le cas où l'on tient compte de la dispersion des couleurs, et qui doivent être substituées, dans ce cas, aux formules de Fresnel.*

Simple énoncé.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 1076. — *Sur les lois de la dispersion plane et de la dispersion circulaire dans les milieux isophanes.*

C. R. : 1850, 2e *sem.*, p. 842. — *Note sur les vibrations transversales de l'éther et sur la dispersion des couleurs.*

DIFFRACTION.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 554 et 573. — *Sur la diffraction de la lumière.*

Le problème de la diffraction de la lumière se ramène en définitive à l'évaluation de deux intégrales définies, dont on obtient des valeurs approchées au moyen de deux séries dont il suffit de calculer quelques termes.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 605 et 670. — *Sur les phénomènes des ombres et de la diffraction.*

Ce Mémoire est la reproduction d'un travail antérieur, composé par Cauchy en 1836, et dont les résultats sont résumés dans une série de lettres insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* pour la même année 1836.

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 712. — *Sur les rayons diffractés qui peuvent être transmis ou réfléchis par la surface de séparation de deux milieux diaphanes.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 759 et 813. — *Sur de nouveaux phénomènes indiqués par le calcul, qui paraissent devoir intéresser les physiciens, et en particulier sur la diffraction du son.*

Extension aux ondes sonores des résultats obtenus pour les ondes lumineuses. — Différences résultant de l'inégale épaisseur des ondes, et en outre de ce que les vibrations sont transversales pour la lumière et longitudinales pour le son.

Ouvrages à consulter.

Journal de M. Liouville, t. V, VII et IX. — *Recherches de M. H. Blanchet sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé et sur la délimitation des ondes.*

M. Briot. — *Recherches sur la théorie mathématique de la lumière;* 1 vol., 1864.

CHAPITRE XII.

MÉCANIQUE CÉLESTE.

SOMMAIRE. — Insuffisance des méthodes anciennement usitées pour l'analyse des mouvements planétaires. — Recherches de Cauchy fondées sur le calcul des résidus. — Méthodes nouvelles pour le développement en série des fonctions astronomiques. — Propriétés et réduction des calculs relatifs à la fonction perturbatrice. — Extension au cas des petites planètes. — Mémoire de M. Le Verrier sur la planète Pallas. — Travaux astronomiques de Cauchy à cette occasion.

MÉMOIRES. — *Mécanique céleste.* — Sur les applications du calcul des résidus et des limites à la Mécanique céleste. — Sur les équations différentielles des mouvements planétaires, et sur la détermination de ces mouvements. — Calcul des inégalités des mouvements planétaires. — Application à ces calculs de la méthode logarithmique. — Rapport et Notes concernant le travail de M. Le Verrier sur la planète Pallas. — Méthodes nouvelles et variées pour la détermination des orbites des planètes et des comètes. — Calcul des éléments des orbites et approximations successives. — *Ouvrages à consulter.*

SOMMAIRE.

Un Mémoire présenté à l'Académie de Turin, en 1831, sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé : *Calcul des limites*, est le point de départ des travaux astronomiques de Cauchy. Voici en quels termes il caractérisait, à cette époque, l'état de la science et l'objet de ses recherches : « Les méthodes, disait-il, que les géomètres ont employées pour déduire du principe de la gravitation les mouvements des corps célestes laissaient encore beaucoup à désirer. Souvent elles manquaient de la rigueur convenable. Ainsi, en particulier, on ne

trouve nulle part, dans la *Mécanique céleste* de Laplace, une démonstration suffisante de la formule de Lagrange, qui sert pourtant de base à la plupart des théories exposées dans cet ouvrage. D'ailleurs, pour déterminer, à l'aide de ces méthodes, les coefficients numériques relatifs à telle ou telle perturbation des mouvements planétaires, les astronomes étaient quelquefois obligés d'entreprendre des calculs qui exigeaient plusieurs années de travail. Un des Membres les plus distingués de cette Académie, M. Plana, m'ayant parlé dernièrement encore du temps que consumaient de pareils calculs, je lui dis que j'étais persuadé qu'il serait possible de les abréger, et même de déterminer immédiatement le coefficient numérique correspondant à une inégalité donnée. Effectivement, au bout de quelques jours, je lui rapportai des formules à l'aide desquelles on pourrait résoudre de semblables questions, et dont j'avais déjà fait l'application à la détermination de certains nombres qu'il est utile de connaître dans la théorie de Saturne et de Jupiter. Quelques jours après, en s'appuyant sur les résultats qu'il avait obtenus dans un de ses Mémoires, M. Plana m'a dit avoir retrouvé, ou les mêmes formules, ou des formules du même genre. Au reste, pour établir les formules dont il s'agit, et d'autres formules analogues que renferme mon Mémoire, il suffit d'appliquer au développement de la fonction désignée par R, dans la *Mécanique céleste*, des théorèmes bien connus, tels que le théorème de Taylor et le théorème de Lagrange sur le développement des fonctions des racines des équations algébriques ou transcendantes. Mais on a besoin de recourir à d'autres principes et à de nouvelles méthodes pour arriver à des résultats plus importants dont je vais maintenant donner une idée. »

Les calculs astronomiques exigeaient l'emploi de certains développements en séries qui, le plus souvent, étaient simplement déduits de la méthode des coefficients indéterminés. « Mais les démonstrations qu'on a prétendu donner de ces formules sont généralement insuffisantes : 1° parce qu'on n'a point examiné si les séries sont convergentes ou divergentes, et qu'en conséquence on ne peut dire le plus souvent, dans quels cas ces formules doivent être admises ou rejetées ; 2° parce qu'on ne s'est point attaché à démontrer que les développements ainsi obtenus avaient pour sommes les fonctions développées, et qu'il peut arriver qu'une série convergente provienne du développement d'une fonction, sans que la somme de la série soit équivalente à la fonction elle-même. Il est vrai que l'établissement des règles générales propres à déterminer dans quels cas les développements des fonctions implicites sont convergents et représentent ces mêmes fonctions, paraissait offrir de grandes difficultés. On peut en juger en lisant attentivement le Mémoire de M. Laplace sur la convergence et la divergence de la série que fournit, dans le mouvement elliptique d'une planète, le développement du rayon vecteur suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Je pense donc que les géomètres et les astronomes attacheront quelque prix à mon travail, quand ils apprendront que je suis parvenu à établir, sur le développement des fonctions, soit explicites, soit implicites, des principes généraux et d'une application facile, à l'aide desquels on peut, non-seulement démontrer avec rigueur les formules et indiquer les conditions de leur existence, mais encore fixer les limites des erreurs que l'on commet en négligeant les restes qui doivent compléter les séries. Parmi ces règles, celles qui se rapportent à la fixation des limites des

erreurs commises, présentent dans leur ensemble un nouveau calcul que je désignerai sous le nom de *Calcul des limites.* »

« Ce Mémoire, ajoute encore Cauchy, renferme, en outre : 1° une théorie de la variation des constantes arbitraires plus générale, et à quelques égards plus simple que celles qui se trouvent exposées dans les Mémoires de MM. Lagrange, Laplace et Poisson ; 2° des intégrales définies propres à représenter, dans le développement de la fonction perturbatrice, le coefficient du sinus ou du cosinus d'un angle donné ; 3° des formules d'interpolation qui servent à déterminer une fonction entière de $\sin x$ et de $\cos x$, quand on connaît un nombre suffisant de valeurs particulières de cette même fonction ; 4° plusieurs développements nouveaux de la fonction perturbatrice, avec des formules propres, non-seulement à fournir les termes généraux de ces développements, mais encore à déterminer les limites des erreurs commises quand on conserve seulement certains termes, en négligeant ceux qui les suivent. Je montre aussi dans quels cas l'un de ces développements doit être employé de préférence à l'autre. Ainsi, en particulier, si l'on demande les perturbations produites dans le mouvement d'une planète par une autre planète, située à très-peu près à la même distance du soleil que la première, le développement employé jusqu'ici par les astronomes devra être rejeté, et il faudra lui substituer un des autres développements ci-dessus mentionnés. On devra donc recourir à ces nouveaux développements dans la théorie des petites planètes, quand on recherchera les inégalités qui dépendent de leurs attractions mutuelles. »

Lorsque Cauchy eut été élu, en novembre 1839, Membre du Bureau des Longitudes, son attention se reporta

de nouveau sur les perfectionnements dont les méthodes astronomiques étaient susceptibles. Ses travaux sont exposés dans le *Recueil des nouveaux exercices* et dans les *Comptes rendus* pour l'année 1840. Ils avaient surtout pour objet de trouver des formules propres à faciliter et à réduire les calculs si longs et si pénibles auxquels les astronomes étaient assujettis. Outre les inconvénients déjà signalés, les anciens développements en séries en offraient d'autres qui n'étaient pas moins graves. D'abord on avait coutume de déduire les coefficients des divers termes des séries les uns des autres, ce qui entraînait des calculs prolixes et ne permettait pas de reconnaître facilement les erreurs qui avaient pu être commises. De plus, dans un grand nombre de cas, les formules employées n'étaient plus suffisamment convergentes, ou même cessaient de l'être tout à fait. Il était donc indispensable de remédier à ces divers inconvénients par une méthode complétement nouvelle. « Le besoin urgent, dit Cauchy, que l'on avait d'une semblable méthode en astronomie, m'était encore représenté dernièrement par M. Le Verrier, qui vient de terminer, à l'aide de ses formules d'interpolation, un grand et difficile travail sur la planète Pallas. Cédant aux instances de ce jeune savant, j'ai dirigé mes recherches vers un problème dont la solution peut épargner aux astronomes tant de fatigues et tant de veilles. J'ai été assez heureux pour atteindre le but de mes efforts. »

Cette nouvelle étude repose sur certaines propriétés des fonctions entières et réelles des sinus et cosinus d'un même angle, qui peuvent toujours se transformer en des fonctions rationnelles dépendant simplement de la tangente trigonométrique de la moitié de cet angle. Si l'on égale ensuite la fonction à zéro, on a une équation auxi-

liaire dont les racines servent à calculer avec une grande approximation les diverses intégrales définies qui entrent dans le calcul des mouvements planétaires, notamment les intégrales relatives à diverses inégalités périodiques dont la détermination offrait de nombreuses difficultés. La méthode employée avait de plus l'avantage de s'appliquer à une foule d'autres problèmes du même genre qu'on rencontre, soit dans la théorie des transcendantes elliptiques, soit dans les questions de physique mathématique.

Les recherches dont il vient d'être parlé conduisirent Cauchy à une théorie toute nouvelle des mouvements planétaires, exposée dans les *Comptes rendus* pour l'année 1842. Lagrange, Laplace et Poisson, dans leurs Mémoires sur la variation des constantes arbitraires, avaient déjà réduit la détermination de ces mouvements à l'intégration d'équations différentielles renfermant, avec le temps et les éléments de chaque orbite, les dérivées partielles de la fonction perturbatrice prises par rapport à ces mêmes éléments. Il s'agit alors de trouver, pour le développement de la fonction perturbatrice, la forme la plus convenable. Pour y parvenir, Cauchy recourt à sa théorie des résidus et lui emprunte deux théorèmes fondamentaux. Le premier sert à exprimer en termes finis une intégrale dans laquelle la fonction sous le signe d'intégration est une fonction rationnelle, souvent même transcendante, d'une exponentielle trigonométrique, lorsque l'intégrale est prise entre les limites 0 et 2π de l'argument. Suivant un second théorème, si, après avoir multiplié, dans une semblable intégrale, l'exponentielle trigonométrique par un module quelconque, on fait varier ce module, la valeur de l'intégrale restera invariable tant que la fonction soumise au

signe d'intégration ne cessera pas d'être une fonction continue de l'argument.

Parmi les avantages considérables de la nouvelle méthode, on doit remarquer surtout les réductions relatives aux intégrales et aux transcendantes qui étaient nécessitées auparavant pour le calcul de la fonction perturbatrice. Ainsi, par exemple, au lieu de la triple série des transcendantes comprises dans l'ancien développement, il suffira de considérer une série double de transcendantes beaucoup plus faciles à calculer. « Pour donner, disait Cauchy, une idée de la réduction ainsi opérée dans les calculs, considérons en particulier le cas où les deux planètes sont Jupiter et Saturne. Alors, en suivant l'ancienne méthode, on devra former le tableau qui se trouve inséré dans le troisième volume de la *Mécanique céleste*, pages 81 et suivantes, et calculer en conséquence plus de quatre-vingt-dix transcendantes, dont plusieurs offriront des valeurs considérables, qui pourront s'élever au nombre 800 et au delà. Au contraire, suivant la nouvelle méthode, pour arriver au même degré d'approximation, on aura seulement à calculer une vingtaine de transcendantes, dont les douze premières sont déjà connues, et dont la plus grande surpasse à peine le nombre 2. »

Énonçons encore, avec Cauchy, les propriétés les plus extraordinaires des nouveaux développements : « 1° Chacun des termes séculaires, c'est-à-dire des termes qui sont indépendants des anomalies, peut s'exprimer sous forme finie par une certaine fonction des éléments des orbites, qui demeure algébrique par rapport aux grands axes et aux excentricités; 2° dans chaque terme périodique, les coefficients des sinus et cosinus des multiples des anomalies moyennes sont la somme d'une série simple de quantités dont chacune peut encore être exprimée

sous forme finie, par une certaine fonction des éléments, qui demeure algébrique par rapport aux grands axes, mais qui devient transcendante par rapport aux excentricités. »

En 1845, une circonstance particulière mit en évidence toute la portée des méthodes astronomiques de Cauchy. M. Le Verrier avait soumis au jugement de l'Académie un Mémoire considérable sur le mouvement de la planète Pallas, et spécialement sur la grande inégalité due à l'influence de Jupiter. La longueur et la complication des calculs se prêtaient difficilement à un contrôle direct qui aurait consisté à reprendre la marche même de l'auteur; mais les méthodes nouvelles dont Cauchy était possesseur lui permirent de simplifier la question d'une façon inespérée, et le mirent en mesure de vérifier, en quelques heures, un travail qui, dans son ensemble, avait exigé plusieurs années de recherches. Voici en quels termes il indique la nature du problème : « On sait que la théorie des petites planètes, découvertes au commencement de ce siècle, s'est refusée jusqu'ici à tout calcul précis, en déconcertant les efforts des astronomes et des géomètres. Les positions de ces astres, données d'avance dans les éphémérides, diffèrent toujours assez notablement de celles qu'indiquent plus tard les observations. En vain l'Académie a-t-elle proposé cette théorie comme sujet de prix. Le concours n'a produit aucun Mémoire digne de l'importance du sujet. Les excentricités et les inclinaisons des orbites de Cérès, de Pallas, de Junon et de Vesta n'étant plus renfermées dans les limites compatibles avec l'usage des méthodes de calcul jusqu'à présent appliquées aux planètes anciennes, on ne voyait plus comment il serait possible de fixer les inégalités périodiques des nouveaux astres, surtout lorsqu'il

s'agissait d'inégalités dont l'ordre était fort élevé. On doit savoir gré à M. Le Verrier de n'avoir point reculé devant la pensée d'attaquer un problème si difficile; on doit lui savoir plus de gré encore d'avoir atteint le but qu'il s'était proposé et d'avoir prouvé, par un exemple très-remarquable, que le problème pouvait être résolu. »

La méthode de Cauchy consiste surtout dans le choix des séries qui doivent être adaptées au calcul. Les séries dont on faisait usage autrefois étaient ordonnées suivant les puissances entières des excentricités ou des inclinaisons des orbites; mais lorsque ces éléments cessent d'être très-petits, les séries ne sont plus convergentes, et il faut leur substituer des développements ordonnés suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes ou des anomalies, et, dans ce cas, la grandeur de l'inclinaison peut même devenir favorable à la convergence des suites. En raison de l'insuffisance des développements connus, M. Le Verrier entreprit de calculer l'inégalité cherchée en se servant des formules d'interpolation adaptées à un système de deux variables. Les résultats de son Mémoire furent d'ailleurs reconnus exacts par Cauchy, qui, en appliquant ses méthodes propres, les vérifia de deux manières différentes. Dans un premier calcul, l'inégalité s'élevait, au maximum, à $906'',6$, et l'angle qui doit être retranché des multiples des anomalies moyennes, était de $29^\circ 3' 55''$; un second calcul conduisait aux nombres $906'',3$ et $29^\circ 3' 25''$. M. Le Verrier avait trouvé de son côté les nombres 895 secondes et $29^\circ 7'$. On voit donc que les résultats de Cauchy s'accordaient entre eux à 3 dixièmes de seconde près, et avec ceux de M. Le Verrier dans des limites d'erreur très-restreintes qui pouvaient, du reste, s'expliquer par l'usage

des Tables de logarithmes à sept décimales, dont M. Le Verrier s'était servi.

L'un des problèmes les plus épineux qui se présentent dans l'étude des mouvements planétaires a pour objet l'évaluation en séries de certaines intégrales qu'on ne sait pas obtenir sous forme finie. Ces développements peuvent être effectués d'une infinité de manières, même dans le cas où la fonction soumise au signe d'intégration ne dépend que d'une seule variable. On peut, en effet, développer la fonction, soit suivant les puissances de la variable elle-même, soit suivant les puissances d'une fonction continue quelconque de cette variable. On conçoit alors qu'on puisse choisir la fonction auxiliaire, de façon à réaliser une convergence plus ou moins rapide. Pour que la série soit convergente entre des limites données, il suffit que les deux modules extrêmes de la quantité prise pour variable soient inférieurs à l'unité; mais comme la série est d'autant plus convergente, que l'on est plus éloigné des limites extrêmes, il y aura avantage à prendre la variable auxiliaire de sorte que ces deux limites soient aussi distantes que possible. Pour réaliser ces diverses conditions, Cauchy décompose la fonction qu'il s'agit de développer, en deux facteurs, dont l'un reste fixe et l'autre se développe de plusieurs manières en séries rapidement convergentes. Si l'on suppose que, par suite du choix du premier facteur, chaque terme de la série puisse être facilement intégré, on aura alors des formules d'une application commode, qui permettront d'effectuer les calculs avec une grande approximation, tout en conservant un petit nombre de termes.

En ce qui concerne particulièrement le développement de la fonction perturbatrice, Cauchy décompose la partie de cette fonction, qui est réciproquement proportionnelle

à la distance des deux astres, en deux facteurs, dont le premier est de la forme que ce rapport acquiert quand les astres se meuvent dans des orbites circulaires et demeure invariable; le second est développé suivant les puissances entières des exponentielles qui ont pour arguments les anomalies moyennes. Les inconnues sont alors exprimées par des intégrales simples ou doubles, dans chacune desquelles la fonction, soumise au signe d'intégration, est le produit du premier facteur par une exponentielle trigonométrique, dont l'argument est proportionnel au temps. En outre, la détermination des intégrales simples se ramène au calcul des seules transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce; et celle des intégrales doubles au calcul de deux autres transcendantes qui sont ce que deviennent les premières quand on multiplie la fonction sous le signe $\int$ par la variable à laquelle se rapporte l'intégration.

On peut ainsi obtenir une foule de séries nouvelles et d'un usage avantageux, en modifiant la forme du facteur fixe ou en substituant au temps une autre variable indépendante. On remarquera surtout les résultats auxquels on arrive quand on exprime toutes les variables en fonction de l'angle qui représente la différence entre les anomalies excentriques des deux astres considérés.

Des modifications aussi profondes dans les méthodes usitées devaient amener un remaniement complet dans la construction des Tables astronomiques et dans les habitudes des savants : « Toutefois, ajoute Cauchy, cette innovation semble destinée à prévaloir, non-seulement en raison de l'économie de temps et de travail qu'elle entraîne nécessairement, mais aussi et surtout parce que les nouveaux développements s'appliquent avec succès au

cas même où il s'agit de calculer les perturbations observées dans le mouvement des comètes, dont l'excentricité devient fort considérable et s'éloigne peu de l'unité. »

MÉMOIRES.

MÉCANIQUE CÉLESTE.

Anc. Ex. : t. IV, p. 140. — *Sur l'équation au moyen de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements planétaires.*

Mém. Dét. : Turin 1831. - **Nouv. Ex.** : t. II, p. 41 (57 pages). — Résumé du Mémoire de 1831 (13 pages) : *Mémoire sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé* Calcul des limites.

Formules pour le développement des fonctions en séries. — Insuffisance des démonstrations relatives aux séries employées en Astronomie. — Détermination des limites des erreurs commises quand on arrête les séries après un certain nombre de termes. — Le Mémoire inséré dans les *Nouveaux Exercices* est la reproduction d'une partie du Mémoire lithographié à Turin.

Bull. Fér. : t. XV, p. 260. — *Sur un nouveau calcul qui s'applique à un grand nombre de questions diverses.*

Mém. Dét. : Milan 1835. — *Sulla Meccanica celeste et sopra un nuovo calcolo chiamato Calcolo dei limiti.*

Nouv. Ex. : t. I, p. 27. - **C. R.** : 1839, 2e *sem.*, p. 184. — *Sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 179. — *Méthodes générales pour la détermination des mouvements des planètes et de leurs satellites.*

Discussion de l'équation caractéristique. — Méthodes pour obtenir les intégrales sous forme finie, lorsque l'opération est possible, et dans le cas contraire, pour développer ces intégrales en séries régulières.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 297, 377 et 432. — *Sur les fonctions alternées qui se présentent dans la théorie des mouvements planétaires.*

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 453 et 501 (32 pages). — *Méthode simple et*

générale pour la détermination numérique des coefficients que renferme le développement de la fonction perturbatrice.

Considérations générales. — Sur la distance mutuelle de deux planètes et sur leur distance apparente vue du Soleil. — Développement de la fonction perturbatrice. — Décomposition de chaque terme en deux facteurs. — Substitution d'intégrales simples aux intégrales doubles qui entrent dans le développement. — Sur l'ordre des termes qui composent la fonction perturbatrice. — Développement des facteurs simples et des fonctions auxiliaires.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 512 et 533. — *Sur le mouvement de notre système planétaire.*

Équations différentielles du mouvement des planètes. — Intégration par le moyen des séries. — Variations du premier ordre des éléments elliptiques.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 565. — *Sur les perturbations des mouvements planétaires, et en particulier sur celles du second ordre.*

Simple énoncé.

C. R. : 1840, 2e *sem.*, p. 579 (20 pages). — *Sur la variation des éléments elliptiques dans le mouvement des planètes.*

Variations du premier et du second ordre des éléments elliptiques et d'une fonction quelconque de ces éléments.

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 84. — *Méthodes propres à simplifier le calcul des inégalités périodiques et séculaires des mouvements des planètes.*

Dans un Mémoire précédent, Cauchy avait donné des formules pour calculer directement les coefficients d'un terme quelconque correspondant à une inégalité donnée dans le développement de la fonction perturbatrice en une série de sinus et de cosinus d'arcs variant proportionnellement au temps; mais la convergence de la série ainsi obtenue était lente; la nouvelle méthode a pour objet de simplifier et de réduire les calculs.

C. R. : 1841, 1er *sem.*, p. 189. — *Sur les variations séculaires des éléments elliptiques dans le mouvement des planètes.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 317. — *Méthode nouvelle pour le calcul des inégalités des mouvements planétaires, et en particulier des inégalités à longues périodes.*

Dans les méthodes usitées, on déduisait les coefficients des divers termes les uns des autres, ce qui entraînait de longs calculs et ne permettait pas facilement de reconnaître les erreurs commises; Cauchy

donne au contraire le moyen de calculer directement chaque coefficient, et d'en opérer séparément la vérification.

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 682. — *Note sur une transcendante que renferme le développement de la fonction perturbatrice relative au système planétaire.*

C. R. : 1841, 2e *sem.*, p. 850. — *Sur la substitution des anomalies excentriques aux anomalies moyennes dans le développement de la fonction perturbatrice.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 59. — *Sur l'application du calcul des limites à l'intégration des équations différentielles de notre système planétaire.*

C. R : 1842, 2e *sem.*, p. 186. — *Sur les variations des éléments du mouvement elliptique des planètes.*

C. R. : 1842, 2e *sem.*, p. 255 et suiv. — Six *Mémoires sur une théorie nouvelle des mouvements planétaires.*

Application du calcul des résidus à l'Astronomie. — Nouveau développement de la fonction perturbatrice. — Réduction du nombre des transcendantes et des termes nécessaires pour obtenir une approximation déterminée. — Transformation des séries triples en séries doubles. — Sur diverses formules qui rendent plus facile l'application du calcul des résidus à l'Astronomie. — Détermination rigoureuse des termes séculaires dans le nouveau développement de la fonction perturbatrice. — Sur une formule qui sert à développer, suivant les puissances entières d'un accroissement attribué au cosinus d'un arc, les accroissements correspondants que prennent les cosinus des multiples de cet arc. — Décomposition de la fonction perturbatrice en produits de facteurs, dont chacun se rapporte à une seule planète.

C. R. : 1843, 2e *sem.*, p. 1157. — *Sur l'application du calcul des limites à l'Astronomie.*

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 13. — *Sur la convergence de la série qui exprime la fonction perturbatrice développée suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes moyennes des planètes que l'on considère.*

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 116. — *Mémoire sur les fonctions continues.*

Application à l'Astronomie.

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 558. — *Sur les valeurs moyennes des fonctions.*

Application à l'Astronomie.

C. R. : 1844, 1er *sem.*, p. 625. — *Sur le calcul des inégalités des mouvements planétaires.*

Décomposition d'une fonction réelle et entière des sinus et cosinus d'un même angle en facteurs simples. — Sur la distance mutuelle de deux planètes considérée comme fonction des exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies moyennes. — Méthode nouvelle à l'aide de laquelle le rapport de l'unité à la distance de deux planètes peut être développé en une série ordonnée suivant les puissances entières de l'anomalie excentrique ou de l'anomalie moyenne de l'une d'elles.

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 159, 279, 699. — *Sur l'application de la méthode logarithmique à la détermination des inégalités périodiques que présentent les mouvements des corps célestes.*

Développement du rapport de l'unité à la distance de deux planètes en une série ordonnée suivant les puissances entières de l'exponentielle trigonométrique dont l'argument est l'anomalie excentrique de l'une des deux planètes. — Développements analogues ordonnés suivant les puissances des exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les anomalies moyennes des deux planètes.

C. R. : 1844, 2e *sem.*, p. 1123 et suiv. — Quatre *Mémoires sur un nouveau genre de développement des fonctions qui permettra d'abréger notablement les calculs astronomiques.*

Décomposition de la fonction perturbatrice en deux facteurs dont un seul fournit, pour les termes d'un degré élevé, des valeurs sensibles. — Des restes qui complètent les séries comprises dans les nouvelles formules lorsque l'on arrête chaque série après un certain nombre de termes.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 767 et 825 (40 pages). — *Rapport sur un Mémoire de M. Le Verrier concernant la grande inégalité de la planète Pallas.*

Vérification au moyen de deux méthodes différentes. — Le Rapport est suivi de six Notes dans lesquelles Cauchy expose sa nouvelle théorie. — Sur les variations du moyen mouvement. — Sur la distance mutuelle des deux planètes. — Sur les développements de la fonction perturbatrice en séries ordonnées suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments sont les anomalies moyennes ou les anomalies excentriques. — Développement du rapport de l'unité à la distance de deux planètes en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments sont les anomalies *excentriques*. — Développement du rapport de l'unité à la distance de deux planètes en une série ordonnée suivant les puissances entières des exponentielles dont les arguments sont les anomalies *moyennes*. — Sur les moyens de simplifier le calcul des inégalités périodiques des mouvements planétaires.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 907 (20 pages). — *Sur la détermination approximative des fonctions représentées par des intégrales.*

La méthode repose sur la décomposition des fonctions soumises au signe d'intégration en deux facteurs, dont le premier seul puisse devenir infini ou discontinu quand le module de la variable atteint les deux limites primitivement calculées; le second facteur se développe d'ailleurs séparément en série. On obtient ainsi des développements dont la convergence est très-rapide. Si, de plus, le premier facteur est de telle nature, que l'on puisse intégrer chaque terme de la nouvelle série, l'intégrale proposée pourra être représentée avec une grande approximation par un petit nombre de termes simples.

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 996. — *Sur l'application des nouvelles formules à l'Astronomie.*

C. R. : 1845, 1er *sem.*, p. 1166 et 1612 (28 pages). — *Sur les séries nouvelles que l'on obtient quand on applique les méthodes précédentes de développement de la fonction perturbatrice à la détermination des inégalités périodiques des mouvements planétaires.*

Sur la série que l'on obtient quand on développe des fonctions d'une seule variable suivant les puissances ascendantes de l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument cette même variable. — Calcul des inégalités périodiques des mouvements planétaires. — Sur une transformation remarquable de la fonction perturbatrice. — Sur la détermination des parties non périodiques de certaines intégrales. — Sur des formules et des théorèmes remarquables qui permettent de calculer très-facilement les perturbations planétaires dont l'ordre est très-élevé.

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 887. — *Méthodes nouvelles pour la détermination des orbites des corps célestes, et en particulier des comètes.*

Détermination complète des orbites et réduction de la question à une équation du premier degré.

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 956. — *Sur l'application de la nouvelle formule d'interpolation à la détermination des orbites que décrivent les corps célestes, et sur l'introduction directe des longitudes et des latitudes observées dans les formules astronomiques.*

C. R. : 1846, 2e *sem.*, p. 1002. — *Sur les formules relatives à la détermination des orbites que décrivent les corps célestes.*

Détermination du plan de l'orbite. — Correction due à l'aberration de la lumière.

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 401, 475, 531, 572, 700. — *Sur la détermination des orbites des planètes et des comètes.*

Calcul des distances de Mercure au Soleil et à la Terre. — Méthode d'interpolation. — Sur le degré d'exactitude avec lequel on peut déterminer les orbites. — Des erreurs occasionnées dans les développements de la longitude et de la latitude géocentriques d'un astre, par suite des erreurs d'observation. — Sur la correction des éléments de l'orbite d'un astre.

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 775, 879, 953. — *Sur la détermination de l'orbite d'une planète, à l'aide de formules qui ne renferment que les dérivées du premier ordre de la longitude et de la latitude géocentriques.*

Sur deux formules générales, dont chacune permet de calculer rapidement des valeurs très-approchées des éléments des orbites. — Sur une première approximation des éléments. — Sur les moyens d'obtenir avec une grande approximation les éléments d'une orbite à l'aide de cinq observations.

C. R. : 1847, 2e *sem.*, p. 797. — *Rapport sur un Mémoire de M. de Gasparis relatif à la détermination des orbites planétaires.*

Sur deux équations qui donnent la longitude du nœud et l'inclinaison de l'orbite d'un astre à l'aide d'observations géocentriques convenablement combinées.

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 27. — *Sur l'abaissement que l'on peut faire subir au degré de l'équation donnée par Lagrange dans la Connaissance des Temps pour l'année* 1821.

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 29. — *Sur quelques propriétés remarquables des fonctions interpolaires, et sur le parti qu'on peut en tirer pour une détermination sûre et facile des éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète.*

Méthode pour apprécier, au fur et à mesure des calculs, le degré d'approximation sur lequel on peut compter.

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 57, 133, 157, 236. — *Formules pour la détermination des orbites des planètes et des comètes.*

C. R. : 1848, 1er *sem.*, p. 88. — *Rapport sur divers Mémoires de M. Michal relatifs à la détermination des orbites des planètes et des comètes.*

C. R. : 1850, 1er *sem.*, p. 426. — *Rapport sur un Mémoire de M. Yvon Villarceau concernant la détermination des orbites planétaires.*

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 990. — *Sur la transformation des variables qui déterminent les mouvements d'une planète, ou même d'une comète,*

en fonction explicite du temps, et sur le développement de ces fonctions en séries convergentes.

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 1033. — *Sur les services que la spirale logarithmique peut rendre à l'Astronomie.*

C. R : 1857, 1er *sem.*, p. 851 et 896. — *Nouvelle méthode pour la détermination des astres, fondée sur la considération des régulateurs.*

Ouvrages à consulter.

Annales de l'Observatoire (série des Mémoires), t. V, p. 337. — *Note sur l'équation dont dépend l'anomalie excentrique, et sur les séries qui se représentent dans la théorie du mouvement elliptique des corps célestes;* par M. J.-A. Serret.

Annales de l'Observatoire (série des Mémoires), t. VII, p. 165. — *Mémoire sur les inégalités à longues périodes du mouvement des planètes;* par M. Puiseux.

Exposé de la méthode de Cauchy pour le calcul des inégalités à longues périodes des longitudes moyennes des planètes. — Développement des Notes publiées par Cauchy dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour l'année 1845. — Extension de la méthode de Cauchy au calcul des inégalités provenant du second terme de la fonction perturbatrice. — Sur la partie de l'inégalité de la longitude moyenne où le petit diviseur n'est élevé qu'à la première puissance. — Applications numériques au calcul des inégalités des planètes Pallas et Victoria.

Annales de l'Observatoire (série des Mémoires), t. VII, p. 263. — *Mémoires sur le calcul des divers termes du développement de la fonction perturbatrice et de ses dérivées;* par M. J. Bourget.

Thèse d'Astronomie, par Faa de Bruno, 1856. — *Sur le développement de la fonction perturbatrice et des coordonnées d'une planète dans son mouvement elliptique.*

Thèse d'Astronomie, par H. Berger, 1863. — *Étude sur le développement de la fonction perturbatrice, d'après Cauchy, dans la théorie des mouvements planétaires.*

Application au calcul de l'inégalité à longue période du moyen mouvement de Vénus sous l'action de la Terre.

Thèse d'Astronomie, par Durrande, 1854. — *Détermination des coefficients des termes périodiques de la fonction perturbatrice.*

C. R. : 1854, 1er *sem.*, p. 807. — *Mémoire de M. Bourget sur le developpement des coordonnées d'une planète en fonction du temps, d'après les méthodes de Cauchy.*

Journ. Liouv. : 1860, p. 65, 105. — *Mémoires de M. Puiseux sur le développement en séries des coordonnées des planètes et de la fonction perturbatrice.*

FIN.

4793

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

H&SS
A
4793

Not wanted by RDSC
2/11/82

UTL AT DOWNSVIEW
D RANGE BAY SHLF POS ITEM C
39 11 07 08 02 016 1